DIKTAT

TEKNIK RISET OPERASIONAL

STMIK MDP

Oleh:
Ir. Rizani Teguh, MT.
Ir. Sudiadi, M.M.A.E.

PROGRAM STUDI SISTEM INFORMASI
SEKOLAH TINGGI MANAJEMEN INFORMATIKA GI MDP
PALEMBANG
2014

KATA PENGANTAR

Puji syukur penulis panjatkan kehadirat Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat dan inayahNya, sehingga Diktat Teknik Riset Operasional ini dapat penulis selesaikan.

Dalam penyelesaian Diktat ini, penulis banyak mendapat bantuan dari berbagai pihak. Untuk itu penulis mengucapkan terima kasih yang sebesar-besarnya kepada :

1. Bapak Ir. Rusbandi, M. Eng, ketua Sekolah Tinggi Manajemen Informatika dan Komputer GI MDP.
2. Rekan-rekan Dosen di STMIK MDP.
3. Staff Perpustakaan STMIK MDP.
4. Pihak-pihak lain yang telah banyak membantu penulis.

Penulis menyadari, msih banyak kekurangan yang terdapat pada diktat ini, untuk itu saran dan kritik yang sifatnya membangun dari pembaca sangat penulis harapkan

Terakhir penulis mohon maaf apabila dalam penulisan ini masih banyak terdapat kekurangan dan kesalahan.

Palembang, November 2014

Penulis

DAFTAR ISI

halaman

BAB 1. PENDAHULUAN

1.1. Sejarah Teknik Riset Operasi

Menurut Tjuju Tarliah Dimyati dan Ahmad Dimyati (2009:1-2) menyatakan, sejak revolusi industri, dunia usaha tampaknya telah diwarnai pertumbuhan dalam hal ukuran (besarnya) dan kompleksitas organisasi-organisasi perusahaan. Bagian yang mengalami perubahan yang cukup mencolok adalah perkembangan dalam pembagian kerja dan segmentasi tanggung jawab manajemen dalam organisasi-organisasi tersebut. Perkembangan spesialisasi ini, bagaimanapun juga telah menciptakan masalah-masalah baru yang sekarang masih terjadi diberbagai organisasi. Salah satu masalah kecendrungan unit-unit suatu organisasi tumbuh secara relative menjadi “kerajaan” yang otonomi dengan tujuan-tujuan dan sistem-sistem nilai sendiri, oleh sebab itu kehilangan pandangan bagaimana kegiatan-kegiatan dan tujuan-tujuan mereka disatukan pada keseluruhan organisasi. Di samping itu, kompleksitas dan spesialisasi dalam suatu organisasi menimbulkan kesulitan yang semakin besar untuk mengalokasikan sumberdaya-sumberdaya yang tersedia untuk kegiatan-kegiatan organisasi yang bermacam-macam dengan cara yang paling efektif sebagai organisasi keseluruhan. Masalah-masalah ini dan kebutuhan untuk menemukan cara yang lebih baik dalam memecahkannya, telah menimbulkan kebutuhan akan teknik-teknik riset operasi.

Senada dalam Siang (2011: 1-2) menyatakan, bahwa masalah Riset Operasi (Operation Research) pertama kali muncul di Inggris selama perang dunia II. Inggris mula-mula tertarik menggunakan metode kuantitatif dalam pemakaian radar selama perang. Mereka menamakan pendekatan itu sebagai *Operation Research* karena mereka menggunakan ilmuwan (*scientist*) untuk meneliti (*Research*) masalah-masalah operasional selama perang. Ternyata pendekatan sangat berhasil dalam pemecahan masalah operasi konvoi, operasi kapal selam, strategi pengeboman dan operasi pertambangan. Aplikasi ini menyebabkan riset operasi didefinisikan sebagai : ”seni memenangkan perang tanpa berperang” (Whitehouse, 1976).

Setelah perang usai, para praktisi riset operasi kemudian berkonsentrasi untuk memformalkan ilmu/pendekatan yang mereka kembangkan selama perang dan mencari aplikasinya dalam sektor industri. Beberapa pendekatan sudah dimulai dalam bidang industri oleh Frederick W. Taylor, yang menimbulkan ilmu tersendiri dalam bidang teknik industri, kebanyakan bisnis adalah bisnis-bisnis mikro yang dikelola oleh satu orang saja. Akan tetapi dengan otomatisasi maka manajemen dan spesialisasi dapat dikembangkan. Otomatisasi tersebut menyebabkkan timbulnya permasalahan baru dalam manajemen. Akibatnya, munculnya ilmu-ilmu disiplin baru seperti riset pasar, manajemen keuangan, dll. Masing-masing ilmu tersebut menyelesaikan permasalahan tanpa memperhatikan organisasi secara keseluruhan.

Seorang manajer harus menentukan penyelesaian secara keseluruhan, bukan pada bagian masing-masing. Penyelesaian bagian masing-masing mudah dicari tetapi optimum secara keseluruhan sulit ditemukan. Riset Operasi membantu manajer dalam menyelesaikan masalah yang terkait interaksi seluruh obyek terhadap solusi terbaik pada seluruh item.

Riset operasi berhubungan dengan prinsip optimalisasi, yaitu bagaimana cara menggunakan sumber daya (waktu, biaya, tenaga, dll) untuk mengoptimalkan hasil. Mengoptimalkan hasil bisa berarti memaksimumkan (menguntungkan/ hasil yang didapatkan) atau meminimumkan (merugikan / hasil yang dikeluarkan).

Beberapa contoh kasus dalam sehari-hari yang berhadapan dengan riset operasi dalam Siang (2009:2) antara lain:

a. Ada berapa jalur darat yang bisa dilalui dari Jakarta ke Yogyakarta? Jalur mana yang paling optimal dari segi jaraka? Dari segi waktu? Dari segi biaya?

b. Pembuatan kaleng untuk menyimpan makanan, berapa ukuran kaleng (volume dan diameter) agar volume tertentu membutukan bahan seminimum mungkin?

c. Pengaturan *traffic light*. Berapa lama lampu hijau harus menyala pada setiap sisi agar antrian kendaraan seminimum mungkin?

Beberapa masalah dalam industri saat ini terus berkembang, sehingga penggunaan komputer dalam RO *continuous* mengalami *upgradin*g terutama dalam menghadapi *International rivalry* dan *productivity problem*. Tanpa bantuan komputer terutama dalam *software* khusus untuk RO sangat *impossible* untuk *finishing problem* yang cukup besar dan *complicated*. Program aplikasi software yang support menganalisa dan biasa digunakan antara lain adalah QM, QSB+, Tora, Mathematicha, LINDO (*Linear, Interactive and Discrete Optimizer*), POM *For Windows* dan sebagainya.

1.2. Pengertian Riset Operasi

Riset Operasi berasal dari Inggris yang merupakan suatu hasil studi operasi-operasi militer selama Perang Dunia II. Istilah riset operasi pertama kali digunakan pada tahun 1940 oleh Mc Closky dan Trefthen di suatu kota kecil, Bowdsey, Inggris.

Kata operasi dapat disefinisikan sebagai tindakan-tindakan yang diterapkan pada beberapa masalah atau hipotesa. Sementara riset dapat didefinisikan sebagai suatu proses yang terorganisasi dalam mencari kebenaran akan masalah atau hipotesa.

Ada beberapa defenisi Riset Operasi

a. Rset Operasi adalah penerapan metode-metode ilmiah terhadap masalah-masalah rumit yang muncul dalam pengarahan dan pengelolaan dari suatu sistem besar manusia, mesin, bahan dan uang dalam industri, bisnis, pemerintahan dan pertahanan. (*Operational Research Society of Great Britain*).

b. Riset operasi berkaitan dengan menentukan pilihan secara ilmiah bagaimana merancang dan menjalankan sistem manusia-mesin secara terbaik, biasanya membutuhkan alokasi sumber daya yang langka. (*Operation Research Society of America*).

c. Riset operasi adalah seni memberikan jawaban buruk terhadap masalah-masalah, yang jika tidak, memiliki jawaban yang lebih buruk. (*T.L. Saaty*).

d. Riset operasi adalah pendekatan dalam pengambilan keputusan yang ditandai dengan penggunaan pengetahuan ilmiah melalui usaha kelompok antar disiplin yang bertujuan menentukan penggunaan terbaik sumber daya yang terbatas. (*Hamdi A. Taha*).

e. Riset operasi dalam arti luas dapat diartikan sebagai penerapan metode-metode, teknik-teknik, dan alat-alat terhadap masalah-masalah yang menyangkut operasi-operasi dari sistem-sistem, sedemikian rupa sehingga memberikan penyelesaian optimal. (*Churchman, Ackoff, dan Arnoff*).

1.3. Model-Model Riset Operasi

1. Model ikonik

   Model ikonik adalah suatu penyajian fisik yang tampak seperti aslinya dari suatu sistem nyata dengan skala yang berbeda. Contoh : Mainan anak-anak, Maket, Foto, dan lain-lain.

2. Model analog

   Model analog adalah suatu model yang menyajikan suatu analogi dari keadaan nyata. Model analog lebih abstrak dibanding model ikonik, karena tidak kelihatan sama antara model dengan dunia nyata. Contoh : Kurva Permintaan, Peta, Jaringan pipa air, dan lain-lain.

3. Model simbolik

   Bentuk model yang paling abstrak dan biasa digunakan daam bidang riset operasi dan pada kenyataannya, riset operasi biasanya disinonimkan dengan suatu formulasi dan menggunakan suatu bentuk khusus dari model simbolik yang dsebut dengan model matematis. Model simbolik menggunakan huruf, angka, dan simbol yang lain untuk menyajikan karakteristik dan properti dari suatu system yang dimodelkan. Contoh : persamaan, bagan, kalimat-kalimat tertulis.

4. Model matematis

   Model matematis mencakup model-model yang mewakili situasi riil sebuah sistem yang berupa fungsi matematik.

1.4. Tahapan Riset Operasio

Tahapan – tahapan dalam penerapan Riset Operasi untuk memecahkan persoalan adalah sebagai berikut :

1. Merumuskan/menganalisis persoalan sehingga jelas tujuan apa yang akan dicapai.
2. Pembentukan model matematika untuk mencerminkan persoalan yang akan dipecahkan. Biasanya model dinyatakan dalam bentuk persamaan yang menggambarkan hubungan antara input dan output serta tujuan yang akan dicapai dalam bentuk fungsi objektif.
3. Mencari pemecahan dari model yang telah dibuat dalam tahap sebelumnya, misalnya dengan menggunakan metode simpleks.
4. Menguji model dan hasil pemecahan dari penggunaan model. Sering juga disebut melakukan validasi. Harus ada mekanisme untuk mengontrol pemecahan, misalnya dengan menggunakan kriteria tertentu.
5. Implementasi hasil pemecahan.

BAB 2 PROGRAM LINEAR

2.1. Pengertian Program Linear

Pemrograman Linier disingkat PL merupakan metode matematik dalam mengalokasikan sumber daya yang terbatas untuk mencapai suatu tujuan seperti memaksimumkan keuntungan dan meminimumkan biaya. PL banyak diterapkan dalam masalah ekonomi, industri, militer, sosial dan lain-lain. PL berkaitan dengan penjelasan suatu kasus dalam dunia nyata sebagai suatu model matematik yang terdiri dari sebuah fungsi tujuan linier dengan beberapa kendala linier.

a. Formulasi Permasalahan

Urutan pertama dalam penyelesaian adalah mempelajari sistem relevan dan mengembangkan pernyataan permasalahan yang dipertimbangakan dengan jelas. Penggambaran sistem dalam pernyataan ini termasuk pernyataan tujuan, sumber daya yang membatasi, alternatif keputusan yang mungkin (kegiatan atau aktivitas), batasan waktu pengambilan keputusan, hubungan antara bagian yang dipelajari dan bagian lain dalam perusahaan, dan lain-lain.

Penetapan tujuan yang tepat merupakan aspek yang sangat penting dalam formulasi masalah. Untuk membentuk tujuan optimalisasi, diperlukan identifikasi anggota manajemen yang benar-benar akan melakukan pengambilan keputusan dan mendiskusikan pemikiran mereka tentang tujuan yang ingin dicapai.

b. Pembentukan model matematik

Tahap berikutnya yang harus dilakukan setelah memahami permasalahan optimasi adalah membuat model yang sesuai untuk analisis. Pendekatan konvensional riset operasional untuk pemodelan adalah membangun model matematik yang menggambarkan inti permasalahan. Kasus dari bentuk cerita diterjemahkan ke model matematik. Model matematik merupakan representasi kuantitatif tujuan dan sumber daya yang membatasi sebagai fungsi variabel keputusan. Model matematika permasalahan optimal terdiri dari dua bagian. Bagian pertama memodelkan tujuan optimasi. Model matematik tujuan selalu menggunakan bentuk persamaan. Bentuk persamaan digunakan karena kita ingin mendapatkan solusi optimum pada satu titik. Fungsi tujuan yang akan dioptimalkan hanya satu. Bukan berarti bahwa permasalahan optimasi hanya dihadapkan pada satu tujuan. Tujuan dari suatu usaha bisa lebih dari satu. Tetapi pada bagian ini kita hanya akan tertarik dengan permasalahan optimal dengan satu tujuan.

Bagian kedua merupakan model matematik yang merepresentasikan sumber daya yang membatasi. Fungsi pembatas bisa berbentuk persamaan (=) atau pertidaksamaan (≤ atau ≥). Fungsi pembatas disebut juga sebagai konstrain. Konstanta (baik sebagai koefisien maupun nilai kanan) dalam fungsi pembatas maupun pada tujuan dikatakan sebagai parameter model. Model matematika mempunyai beberapa keuntungan dibandingakan pendeskripsian permasalahan secara verbal. Salah satu keuntungan yang paling jelas adala model matematik menggambarkan permasalahan secara lebih ringkas. Hal ini cenderung membuat struktur keseluruhan permasalahan lebih mudah dipahami, dan membantu mengungkapkan relasi sebab akibat penting. Model matematik juga memfasilitasi yang berhubungan dengan permasalahan dan keseluruhannya dan mempertimbangkan semua keterhubungannya secara simultan. Terakhir, model matematik membentuk jembatan ke penggunaan teknik matematik dan komputer kemampuan tinggi untuk menganalisis permasalahan.

Di sisi lain, model matematik mempunyai kelemahan. Tidak semua karakteristik sistem dapat dengan mudah dimodelkan menggunakan fungsi matematik. Meskipun dapat dimodelkan dengan fungsi matematik, kadang-kadang penyelesaiannya sulit diperoleh karena kompleksitas fungsi dan teknik yang dibutuhkan.

c. Bentuk umum pemrograman linier adalah sebagai berikut :

1. Fungsi tujuan :

$$\text{Maksimumkan atau minimumkan } z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

2. Sumber daya yang membatasi :

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = / \leq / \geq b_1$

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = / \leq / \geq b_2$

…

$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = / \leq / \geq b_m$

$x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$

Simbol x_1, x_2, ..., x_n (x_i) menunjukkan variabel keputusan. Jumlah variabel keputusan (x_i) oleh karenanya tergantung dari jumlah kegiatan atau aktivitas yang dilakukan untuk mencapai tujuan. Simbol $c_1, c_2, ..., c_n$ merupakan kontribusi masing-masing variabel keputusan terhadap tujuan, disebut juga koefisien fungsi tujuan pada model matematiknya.Simbol a_{11}, ...,a_{1n},...,a_{mn} merupakan penggunaan per unit variabel keputusan akan sumber daya yang membatasi, atau disebut juga sebagai koefisien fungsi kendala pada model matematiknya. Simbol $b_1, b_2, ..., b_m$ menunjukkan jumlah masing-masing sumber daya yang ada. Jumlah fungsi kendala akan tergantung dari banyaknya sumber daya yang terbatas.

Pertidaksamaan terakhir (x_1, x_2, …, $x_n \geq 0$) menunjukkan batasan non negatif. Membuat model matematik dari suatu permasalahan bukan hanya menuntut kemampuan matematik tapi juga menuntut seni permodelan. Menggunakan seni akan membuat permodelan lebih mudah dan menarik.

Kasus pemrograman linier sangat beragam. Dalam setiap kasus, hal yang penting adalah memahami setiap kasus dan memahami konsep permodelannya. Meskipun fungsi tujuan misalnya hanya mempunyai kemungkinan bentuk maksimisasi atau minimisasi, keputusan untuk memilih salah satunya bukan pekerjaan mudah. Tujuan pada suatu kasus bisa menjadi batasan pada kasus yang lain. Harus hati-hati dalam menentukan tujuan, koefisien fungsi tujuan, batasan dan koefisien pada fungsi pembatas.

2.2. Model Perogram Linear

Pada Model Program Linear ada 2 Metode yang dipakai yaitu : Metode Grafik dan Metode matematik. Metode grafik hanya bisa digunakan untuk menyelesaikan permasalahan dimana hanya terdapat dua variabel keputusan. Untuk menyelesaikan permasalahan tersebut, langkah pertama yang harus dilakukan adalah memformulasikan permasalahan yang ada ke dalam bentuk Linear Programming (LP). Langkah-langkah dalam formulasi permasalahan adalah :

1. pahamilah secara menyeluruh permasalahan manajerial yang dihadapi.
2. identifikasikan tujuan dan kendalanya
3. definisikan variabel keputusannya
4. gunakan variabel keputusan untuk merumuskan fungsi tujuan dan fungsi kendala secara matematis.

Sebagai contoh dalam memformulasikan permasalahan, berikut ini akan dibahas perusahaan Furniture yang akan membuat meja dan kursi. Keuntungan yang diperoleh dari satu unit meja adalah Rp 70.000,- sedangkian keuntungan yang diperoleh dari satu unit kursi adalah Rp. 50.000,-. Namun untuk meraih keuntungan tersebut Perusahaan menghadapi kendala keterbatasan jam kerja. Untuk pembuatan 1 unit meja memerlukan 4 jam kerja. Untuk pembuatan 1 unit kursi membutuhkan 3 jam kerja. Untuk pengecatan 1 unit meja dibutuhkan 2 jam kerja, dan untuk pengecatan 1 unit kursi dibutuhkan 1 jam kerja. Jumlah jam kerja yang tersedia untuk pembuatan meja dan kursi adalah 240 jam per minggu sedang jumlah jam kerja untuk pengecatan adalah 100 jam per minggu. Berapa jumlah meja dan kursi yang sebaiknya diproduksi agar keuntungan perusahaan maksimum ?

Dari kasus di atas dapat diketahui bahwa tujuan perusahaan adalah memaksimumkan profit. Sedangkan kendala perusahaan tersebut adalah terbatasnya waktu yang tersedia untuk pembuatan dan pengecatan. Apabila permasalahan tersebut diringkas dalam satu tabel akan tampak sebagai berikut:

TABEL 2.1 Informasi Permasalahan Perusahaan Furniture

	Jam kerja per unit		Waktu Tersedia per minggu (jam)
	Meja	**Kursi**	
Pembuatan	4	3	240
Pengecatan	2	1	100
Kebutuhan per unit	Rp. 70.000,-	Rp. 50.000,-	

Mengingat produk yang akan dihasilkan adalah meja dan kursi, maka dalam rangka memaksimumkan profit, perusahaan harus memutuskan berapa jumlah meja dan kursi yang sebaiknya diproduksi. Dengan demikian dalam kasus ini, yang merupakan variabel keputusan adalah meja (X_1) dan kursi (X_2). Setelah kita mendefinisikan variabel keputusan, maka langkah selanjutnya adalah menuliskan secara matematis fungsi tujuan dan fungsi kendala.

1. Fungsi Tujuan

Tujuan perusahaan adalah maksimisasi keuntungan, sehingga kita dapat menuliskan fungsi tujuan sebagai berikut : P = (Rp. 70.000 x jumlah meja + Rp. 50.000 x jumlah kursi) yang diproduksi atau secara matematis dapat dituliskan :

Maksimumkan $Z = 70.000\ X_1 + 50.000\ X_2$

2. Fungsi kendala

Berkaitan dengan sumber daya yang digunakan, perusahaan tidak bisa memperkirakan secara tepat kebutuhan sumber daya yang digunakan untuk mencapai keuntungan tertentu. Biasanya perusahaan menyediakan sumber daya tertentu yang merupakan kebutuhan minimum atau maksimum. . Kondisi seperti ini secara matematis diungkapkan dengan pertidaksamaan. Kendala yang pertama adalah waktu yang tersedia di departemen pembuatan. Total waktu yang diperlukan untuk pembuatan X_1 (meja) dimana untuk membuat satu unit meja diperlukan waktu 4 jam kerja dan untuk pembuatan X_2 (kursi) diperlukan waktu 3 jam kerja. Total waktu pembuatan yang tersedia adalah 240 jam,

Seperti halnya pada kendala yang pertama, maka pada kendala kedua dapat diketahui bahwa total waktu yang diperlukan untuk pengecatan X_1 (meja) diperlukan waktu 2 jam kerja dan untuk pengecatan X_2 (kursi) dibutuhkan waktu 1 jam kerja. Total waktu pengecatan yang tersedia adalah 100 jam.

Salah satu syarat yang harus dipenuhi dalam Linear Programming adalah asumsi nilai X_1 dan X_2 tidak negatif. Artinya bahwa $X_1 \geq 0$ (jumlah meja yang diproduksi adalah lebih besar atau sama dengan nol) . $X_2 \geq 0$ (jumlah kursi yang diproduksi adalah lebih besar atau sama dengan nol)

Dari uraian di atas dapat dirumuskan formulasi permasalahan secara lengkap sebagai berikut :

1. Fungsi tujuan :

   Maksimumkan $Z = 70.000\ X_1 + 50.000\ X_2$

2. Fungsi kendala :

   $4\ X_1 + 3\ X_2 \leq 240$ (kendala departemen pembuatan)

   $2X_1 + 1\ X_2 \leq 100$ (kendala departemen pengecatan)

   $X_1, X_2\ \geq 0$ (kendala non negatif pertama)

Kasus Furniture tersebut akan kita selesaikan dengan metode grafik. Keterbatasan metode grafik adalah bahwa hanya tersedia dua sumbu ordinat, sehingga tidak bisa digunakan untuk menyelesaikan kasus yang lebih dari dua variabel keputusan. Langkah pertama dalam penyelesaian dengan metode grafik adalah menggambarkan fungsi kendalanya. Untuk menggambarkan kendala pertama secara grafik, kita harus merubah tanda pertidaksamaan menjadi tanda persamaan seperti berikut.

$4\ X_1 + 3\ X_2 = 240$

Kendala ini akan memotong salah satu atau kedua sumbu. Sebagaimana halnya yang sudah kita pelajari dalam aljabar, bahwa untuk menggambarkan fungsi linear tidak lain merupakan garis lurus, maka kita akan mencari titik potong garis tersebut dengan kedua sumbu. Suatu garis akan memotong salah satu sumbu apabila nilai variabel yang lain sama dengan nol. Dengan demikian kendala pertama akan memotong X_1, pada saat $X_2 = 0$, demikian juga kendala ini akan memotong X_2, pada saat $X_1 = 0$.

Kendala I: $4\ X_1 + 3\ X_2 = 240$ memotong sumbu X_1 pada saat $X_2 = 0$

$4\ X_1 + 0 = 240$

$X_1 = 240/4$

$= 60.$

memotong sumbu X_2 pada saat $X_1 = 0$

$0 + 3 X_2 = 240$

$X_2 = 240/3$

$= 80$

Kendala I memotong sumbu X_1 pada titik (60, 0) dan memotong sumbu X_2 pada titik (0, 80).

Kendala II: $2 X_1 + X_2 = 100$ memotong sumbu X_1 pada saat $X_2 = 0$.

$2 X_1 + 0 = 100$

$X_1 = 100/2$

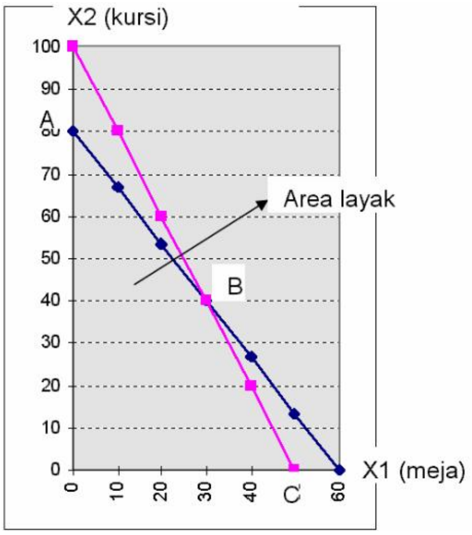
$= 50$

memotong sumbu X_2 pada saat $X_1 =0$

$0 + X_2 = 100$

$X_2 = 100$

Kendala I memotong sumbu X_1 pada titik (50, 0) dan memotong sumbu X_2 pada titik (0, 100).



Gambar 2.1. Area layak

Titik potong kedua kendala bisa dicari dengan cara substitusi atau eliminasi

$2 X_1 + X_2 = 100$

$X_2 = 100 - 2 X_1$

$4 X_1 + 3 X_2 = 240$

$4 X_1 + 3 (100 - 2 X_1) = 240$

$4 X_1 + 300 - 6 X_1 = 240$

$- 2 X_1 = 240 - 300$

$= - 60$

$X_1 = -60/-2 = 30.$

$X_2 = 100 - 2 X_1$

$X_2 = 100 - 2 * 30$

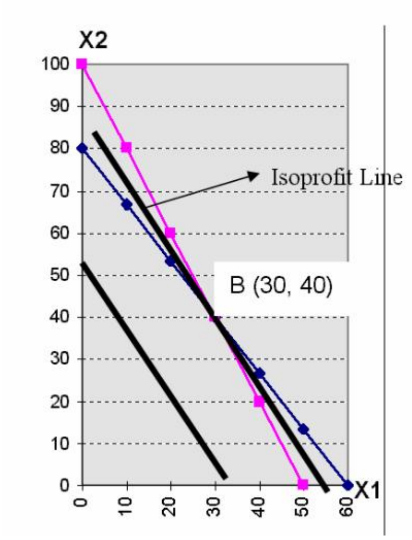
$= 100 - 60$

$= 40$

Sehingga kedua kendala akan saling berpotongan pada titik (30, 40). Tanda $\leq$ pada kedua kendala ditunjukkan pada area sebelah kiri dari garis kendala. Sebagaimana nampak pada gambar 2.1, *feasible region* (area layak) meliputi daerah sebelah kiri dari titik A (0; 80), B (30; 40), dan C (60; 0). Untuk menentukan solusi yang optimal, ada dua cara yang bisa digunakan yaitu :

1. dengan menggunakan garis profit (iso profit line)
2. dengan titik sudut (corner point)

Penyelesaian dengan menggunakan garis profit adalah penyelesaian dengan menggambarkan fungsi tujuan. Kemudian fungsi tujuan tersebut digeser ke kanan sampai menyinggung titik terjauh dari dari titik nol, tetapi masih berada pada area layak (feasible region). Untuk menggambarkan garis profit, kita mengganti nilai Z dengan sembarang nilai yang mudah dibagi oleh koefisien pada fungsi profit. Pada kasus ini angka yang mudah dibagi angka 7 (koefisien X_1) dan 5 (koefisien X_2) adalah 35. Sehingga fungsi tujuan menjadi 35 = 7



Gambar 2.2. Iso profit line

$X_1 + 5\ X_2$. Garis ini akan memotong sumbu X_1 pada titik (5, 0) dan memotong sumbu X_2 pada titik (0, 7). Dari gambar 2. 2 dapat dilihat bahwa *iso profit line* menyinggung titik B yang merupakan titik terjauh dari titik nol. Titik B ini merupakan titik optimal. Untuk mengetahui berapa nilai X_1 dan X_2, serta nilai Z pada titik B tersebut, kita mencari titik potong antara kendala I dan kendala II (karena titik B merupakan perpotongan antara kendala I dan kendala II). Dengan menggunakan eliminiasi atau subustitusi diperoleh nilai $X_1 = 30$, $X_2 = 40$. dan Z = 4.100.000. Dari hasil perhitungan tersebut maka dapat disimpulkan bahwa keputusan perusahaan yang akan memberikan profit maksimal adalah memproduksi X_1 sebanyak 30 unit, X_2 sebanyak 40 unit dan perusahaan akan memperoleh profit sebesar 4.100. 000.

Penyelesaian dengan menggunakan titik sudut (corner point) artinya kita harus mencari nilai tertinggi dari titik-titik yang berada pada area layak (feasible region). Dari gambar 2.1, dapat dilihat bahwa ada 4 titik yang membatasi area layak, yaitu titik 0 (0, 0), A (0, 80), B (30, 40), dan C (50, 0). Keuntungan pada titik O (0, 0) adalah (70.000 x 0) + (50.000 x 0) = 0.

Keuntungan pada titik A (0; 80) adalah (70.000 x 0) + (50.000 x 80) = 4.000.000

Keuntungan pada titik B (30; 40) adalah (70.000 x 30) + (50.000 x 40) = 4.100.000.

Keuntungan pada titik C (50; 0) adalah (70.000 x 50) + (50.000 x 0) = 3.500.000.

Karena keuntungan tertinggi jatuh pada titik B, maka sebaiknya perusahaan memproduksi meja sebanyak 30 unit dan kursi sebanyak 40 unit, dan perusahaan memperoleh keuntungan optimal sebesar 4.100.000.

BAB III. METODE SIMPLEKS

3.1. **Bentuk Umum**

Persoalan program linier tidak selalu sederhana karena melibatkan banyak constraint (pembatas) dan banyak variabel sehingga tidak mungkin diselesaikan dengan metode grafik. Oleh karena itu serangkaian prosedur matematik (aljabar linier) diperlukan untuk mencari solusi dari persoalan yang rumit tersebut. Prosedur yang paling luas digunakan adalah Metode Simpleks. Penemuan metode ini merupakan lompatan besar dalam Riset Operasi dan digunakan sebagai prosedur penyelesaian dari setiap program komputer.

Bentuk Standar :

Maksimalkan/Minimalkan : $Z = C_1X_1 + C_2X_2 + C_3X_3 + \ldots + C_nX_n$

Fungsi pembatas:

$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + a_{13}X_3 + \ldots + a_{1n}X_n \leq b_1$

$a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + a_{23}X_3 + \ldots + a_{2n}X_n \leq b_2$

. . . . . .

$a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + a_{m3}X_3 + \ldots + a_{mn}X_n \leq b_m$

3.2. Kasus Maksimisasi

Fungsi Tujuan :

Maksimumkan : $Z – C_1X_1-C_2X_2- \ldots –C_nX_n-0S_1-0S_2-\ldots-0S_n = NK$

Fungsi Pembatas :

$a_{11}X_{11}+a_{12}X_{12}+\ldots+a_{1n}X_n+ S_1+0S_2+\ldots+0S_n = b_1$

$a_{21}X_{21}+a_{22}X_{22}+\ldots+a_{2n}X_n+ 0S_1+1S_2+\ldots+0S_n = b_2$

……. …….. ……. ….. ….. …. …..= …

$$\underbrace{a_{m1}X_{m1}+a_{m2}X_{m2}+....+a_{mn}X_{n}}_{\text{Var. Kegiatan}}+\underbrace{S_1+0S_2+...+1S_n}_{\text{Slack Variabel}} = b_m$$

Tabel Simpleks

Var. Dasar	**X_1**	**X_2**	**. . . .**	**X_n**	**S_1**	**S_2**	**. . . .**	**S_n**	**NK**
Z	$-C_1$	$-C_2$	. . . .	$-C_n$	0	0	0	0	0
S_1	a_{11}	a_{12}	. . .	a_{1n}	1	0	0	0	b_1
S_2	a_{21}	a_{22}	. . .	a_{2n}	0	1	0	0	b_2
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
S_n	a_{m1}	a_{m2}	. . .	a_{mn}	0	0	0	1	b_m

Contoh kasus

Diketahui :
Model Program Linear:

1. Fungsi Tujuan :
   Maksimumkan : $Z = 15\ X_1 + 10\ X_2$

2. Fungsi Pembatas :
   a. Bahan A : $X_1 + X_2 \leq 600$
   b. Bahan B : $2\ X_1 + X_2 \leq 1.000$
   Syarat non negative : $X_1, X_2 \geq 0$

Hitung nilai optimum!

Penyelelesaian:
A. Model Simpleks :

1. Fungsi Pembatas :
   a. Bahan A : $X_1 + X_2 + S_1 + 0\ S_2 = 600$
   b. Bahan B : $2\ X_1 + X_2 + 0\ S_1 + S_2 = 1.000$
   Syarat non negative : $X_1, X_2, S_1, S_2 > 0$

2. Merubah fungsi tujuan :
   $Z = 15\ X_1 + 10\ X_2 + 0\ S_1 + 0\ S_2$
   $Z – 15\ X_1 – 10\ X_2 – 0\ S_1 – 0\ S_2 = 0$

B. Tabel Simpleks

Variabel dasar	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	NK
Z	1	-15	-10	0	0	0
S_1	0	1	1	1	0	600
S_2	0	2	1	0	1	1.000

Langkah perhitungan

1. Iterasi 0

Variabel dasar	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	NK
Z	1	-15	-10	0	0	0
S_1	0	1	1	1	0	600
S_2	0	2	1	0	1	1.000

2. Iterasi 1

Kolom kunci X_1 (nilai negative terbesar pada baris Z)

Variabel dasar	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	NK	Angka Indeks
Z	1	-15	-10	0	0	0	0
S_1	0	1	1	1	0	600	600
S_2	0	2	1	0	1	1.000	500

Angka indeks terkecil = 500 , Angka kunci perpotongan kolom dengan baris = 2

Variabel dasar baru X_1

Variabel dasar	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	NK
Z						
S_1						
X_1	0	1	1/2	0	1/2	500

Baris Z

Z	X_1	X_2	S_1	S_2	NK
1	-15	- 10	0	0	0
0	1	½	0	½	500 x (-15)

--- -

Z	X_1	X_2	S_1	S_2	NK
1	-15	- 10	0	0	0
0	-15	- 7,5	0	-7,5	-7.500

-- -

1 0 -2,5 0 7,5 7.500

Baris S1

Z X_1 X_2 S_1 S_2 NK

----

0 1 1 1 0 600

0 1 ½ 0 ½ 500 x (1)

Z X_1 X_2 S_1 S_2 NK

----

0 1 1 1 0 600

0 1 ½ 0 ½ 500

--- -

0 0 ½ 1 -1/2 100

Variabel dasar	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	NK
Z	1	0	-2,5	0	7,5	7.500
S_1	0	0	1/2	1	-1/2	100
X_1	0	1	1/2	0	1/2	500

3. Iterasi 2

Kolom kunci X2

Variabel dasar	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	NK	Angka Indeks
Z	1	0	-2,5	0	7,5	7.500	-
X_2	0	0	1/2	1	-1/2	100	200
X_1	0	1	1/2	0	1/2	500	1.000

Baris kunci = 200 (angka indeks terkecil), angka kunci = ½

Variabel dasar baru X_2

Variabel dasar	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	NK
Z						
X_2	0	0	1	2	-1	200
X_1						

Baris Z

Z X_1 X_2 S_1 S_2 NK

----

1 0 -2,5 0 7,5 7.500

0 0 1 2 -1 200 x (-2,5)

-- -

Z	X_1	X_2	S_1	S_2	NK
1	0	-2,5	0	7,5	7.500
0	0	-2,5	-5	2,5	-500
1	0	0	5	5	8.000

Baris X_1

Z	X_1	X_2	S_1	S_2	NK
0	1	½	0	½	500
0	0	1	2	-1	200 x (1/2)

Z	X_1	X_2	S_1	S_2	NK
0	1	½	0	½	500
0	0	½	1	-1/2	400
0	1	0	-1	1	100

Variabel dasar	**Z**	**X_1**	**X_2**	**S_1**	**S_2**	**NK**
Z	1	0	0	5	5	8.000
X_2	0	0	1	2	-1	200
X_1	0	1	0	-1	1	100

Proses iterasi selesai karena angka koefisien pada fungsi tujuan tidak ada lagi yang memiliki nilai negative. Hasil yang di dapat adalah :

$X_1 = 100$
$X_2 = 200$
$Z_{maksimum} = 8.000$

3.3. Kasus Minimisasi

Contoh Kasus

1. Fungsi Tujuan
   Minimumkan : $Z = 40 X_1 + 20 X_2$

2. Fungsi Pembatas

   $3 X_1 + X_2 \geq 27$
   $X_1 + X_2 \geq 21$
   $X_1 + 2 X_2 \geq 30$
   Syarat non negative : $X_1, X_2 \geq 0$

Model Simpleks

1. Fungsi Tujuan : $Z = 40\ X_1 + 20\ X_2 + 0\ S_1 + 0\ S_2 + 0\ S_3$

   $Z - 40\ X_1 - 20\ X_2 - 0\ S_1 - 0\ S_2 - 0\ S_3 = 0$

2. Fungsi Pembatas :

   $3\ X_1 + X_2 – S_1 = 27$

   $X_1 + X_2 – S_2 = 21$

   $X_1 + 2\ X_2 – S_3 = 30$

   Syarat non negative ; $X_1, X_2, S_1, S_2, S_3 \geq 0$

Pada solusi awal, yaitu : $X_1 = X_2 = 0$, Maka : $S_1 = - 27$; $S_2 = -21$; $S_3 = -30$.
S_1, S_2, S_3 harus non negative. Untuk itu perlu ditambah variable buatan (artificial variable) sebesar A, maka fungsi pembatas menjadi :

$3\ X_1 + X_2 – S_1 + A_1 = 27$

$X_1 + X_2 – S_2 + A_2 = 21$

$X_1 + 2\ X_2 – S_3 + A_3 = 30$

Syarat non negative : $X_1, X_2, S_1, S_2, S_3, A_1, A_2, A_3 \geq 0$.

Untuk fungsi tujuan diberi nilai M positif, sehingga fungsi tujuan menjadi:

$Z - 40\ X_1 - 20\ X_2 - 0\ S_1 - 0\ S_2 - 0\ S_3 – MA_1 – MA_2 – MA_3 = 0$

Ada dua metode penyelesaian persoalan metode simpleks kasus minimisasi, yaitu :

A. Metode M (metode Penalti)

B. Metode dua tahap

A. Metode M (metode penalty)

1. Fungsi Tujuan

   Minimumkan : $Z = 40\ X_1 + 20\ X_2$

2. Fungsi Pembatas

   $3\ X_1 + X_2 \geq 27$

   $X_1 + X_2 \geq 21$

   $X_1 + 2\ X_2 \geq 30$

   Syarat non negative : $X_1, X_2 \geq 0$

   Metode Simpleks

   $3\ X_1 + X_2 – S_1 + A_1 = 27$

   $A_1 = 27 – 3\ X_1 – X_2 + S_1$

$X_1 + \quad X_2 - S_2 + A_2 = 21$
$A_2 = 21 - X_1 - X_2 + S_2$
$X_1 + 2\,X_2 - S_3 + A_3 = 30$
$A_3 = 30 - X_1 - 2\,X_2 + S_3$

Substitusikan ke dalam fungsi tujuan

$Z - 40\,X_1 - 20\,X_2 - 0\,S_1 - 0\,S_2 - 0\,S_3 - MA_1 - MA_2 - MA_3 = 0$

$Z - 40\,X_1 - 20\,X_2 - M(27 - 3\,X_1 - X_2 + S_1) - M(21 - X_1 - X_2 + S_2) - M(30 - X_1 - 2\,X_2 + S_3) = 0$

$Z - 40\,X_1 - 20\,X_2 - 27\,M + 3\,MX_1 + MX_2 - MS_1 - 21\,M + MX_1 + MX_2 - MS_2 - 30\,M + MX_1 + 2\,MX_2 - MS_3 = 0$

$Z - 40\,X_1 - 20\,X_2 - 78\,M + 5\,MX_1 + 4\,MX_2 - MS_1 - MS_2 - MS_3 = 0$

$Z - 40\,X_1 + 5\,MX_1 - 20\,X_2 + 4\,MX_2 - MS_1 - MS_2 - MS_3 = 78\,M$

$Z - (40 - 5M)X_1 - (20 - 4M)X_2 - MS_1 - MS_2 - MS_3 = 78\,M$

Perubahan bentuk model simpleks kasus minimisasi:

1. Fungsi tujuan :

   $Z - (40 - 5M)X_1 - (20 - 4M)X_2 - MS_1 - MS_2 - MS_3 = 78\,M$

2. Fungsi Pembatas

   $3\,X_1 + \quad X_2 - S_1 + A_1 = 27$
   $X_1 + \quad X_2 - S_2 + A_2 = 21$
   $X_1 + 2\,X_2 - S_3 + A_3 = 30$

   Syarat non negative : $X_1, X_2, S_1, S_2, S_3, A_1, A_2, A_3 \geq 0$.

Tabel Simpleks :

Solusi awal kasus minimisasi metode M

Variabel Dasar	**X_1**	**X_2**	**S_1**	**S_2**	**S_3**	**A_1**	**A_2**	**A_3**	**NK**
Z	-(40 – 5M)	-(20 – 4M)	- M	-M	-M	0	0	0	78 M
A_1	3	1	-1	0	0	1	0	0	27
A_2	1	1	0	-1	0	0	-1	0	21
A_3	1	2	0	0	-1	0	0	1	30

Variabel Dasar	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	A_1	A_2	A_3	NK
Z	**- 40 + 5M**	-20 + 4M	- M	-M	-M	0	0	0	78 M
A_1	3	1	-1	0	0	1	0	0	27
A_2	1	1	0	-1	0	0	-1	0	21
A_3	1	2	0	0	-1	0	0	1	30

Iterasi-1

Variabel Dasar	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	A_1	A_2	A_3	NK	Indeks
Z	- 40 + 5M	-20 + 4M	- M	-M	-M	0	0	0	78 M	-
A_1	**3**	1	-1	0	0	1	0	0	27	9
A_2	1	1	0	-1	0	0	-1	0	21	21
A_3	1	2	0	0	-1	0	0	1	30	30

Indeks terkecil = 9, pada baris A_1, jd angka kunci = 3

Variabel dasar baru X_1, ganti baris A_1 dengan :
Kolom X_1 = 3/3 = 1
Kolom X_2 = 1/3
Kolom S_1 = -1/3
Kolom S_2 = 0/3 = 0
Kolom S_3 = 0/3 = 0
Kolom A_1 = 1/3
Kolom A_2 = 0/3 = 0
Kolom A_3 = 0/3 = 0
Kolom NK = 27/3 = 9

Ganti baris Z

X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	A_1	A_2	A_3	NK	
-40 + 5 M	-20 + 4 M	- M	-M	-M	0	0	0	78 M	
1	1/3	-1/3	0	0	1/3	0	0	9	x (-40 + 5 M)
									-

X1	X2	S1	S2	S3	A1	A2	A3	NK	
-40 + 5 M	-20 + 4 M	- M	-M	-M	0	0	0	78 M	
- 40 + 5 M	-40/3 + 5/3 M	40/3 – 5/3 M	0	0	-40/3 + 5/3 M	0	0	-360 + 45 M	-
0	-20/3 + 7/3 M	-40/3 + 2/3 M	-M	-M	40/3 – 5/3 M	0	0	360 + 33 M	

Baris A_2

X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	A_1	A_2	A_3	NK		
1	1	0	-1	0	0	-1	0	21		
1	1/3	-1/3	0	0	1/3	0	0	9	x (1)	-
0	2/3	1/3	-1	0	-1/3	-1	0	12		

Baris A_3

X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	A_1	A_2	A_3	NK		
1	2	0	0	-1	0	0	1	30		
1	1/3	-1/3	0	0	1/3	0	0	9	x (1)	-
0	5/3	1/3	0	-1	-1/3	0	1	21		

Variabel Dasar	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	A_1	A_2	A_3	NK
Z	0	**-20/3 + 7/3 M**	-40/3 + 2/3 M	- M	- M	40/3 – 5/3 M	0	0	360 + 33 M
X_1	1	1/3	-1/3	0	0	1/3	0	0	9
A_2	0	2/3	1/3	-1	0	-1/3	1	0	12
A_3	0	5/3	1/3	0	-1	-1/3	0	1	21

Iterasi-2

Variabel Dasar	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	A_1	A_2	A_3	NK	Indeks
Z	0	**-20/3 + 7/3 M**	-40/3 + 2/3 M	- M	- M	40/3 – 5/3 M	0	0	360 + 33 M	-
X_1	1	1/3	-1/3	0	0	1/3	0	0	9	27
A_2	0	2/3	1/3	-1	0	-1/3	1	0	12	18
A_3	0	**5/3**	1/3	0	-1	-1/3	0	1	21	63/5

Indeks terkecil 63/5 pada baris A_3, jd angka kunci = 5/3

Variabel dasar baru X_2, ganti baris A_3 dengan :
Kolom $X_1 = 0/(5/3) = 0$
Kolom $X_2 = (5/3)/(5/3) = 1$
Kolom $S_1 = (1/3)/(5/3) = 1/5$
Kolom $S_2 = 0/(5/3) = 0$
Kolom $S_3 = -1/(5/3) = -3/5$
Kolom $A_1 = -(1/3)/(5/3) = -1/5$
Kolom $A_2 = 0/(5/3) = 0$
Kolom $A_3 = 1/(5/3) = 3/5$
Kolom NK = 21/(5/3) = 63/5

Baris Z

X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	A_1	A_2	A_3	NK
0	-20/3 + 7/3 M	-40/3 + 2/3 M	-M	-M	40/3 – 5/3 M	0	0	360 + 33 M
0	1	1/5	0	-3/5	-1/5	0	3/5	63/5 x (-20/3 + 7/3 M)

X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	A_1	A_2	A_3	NK
0	-20/3 + 7/3 M	-40/3 + 2/3 M	-M	-M	40/3 – 5/3 M	0	0	360 + 33 M
0	-20/3 + 7/3 M	-4/3 + 7/15 M	0	4 – 7/5 M	4/3 – 7/15 M	0	-4 + 7/5 M	-84 + 147/5
0	0	- 12 + 1/5 M	-M	-4 + 2/5 M	12 - 6/5 M	0	4 – 7/5 M	444 + 18/5 M

Baris X_1

X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	A_1	A_2	A_3	NK
1	1/3	-1/3	0	0	1/3	0	0	9
0	1	1/5	0	-3/5	-1/5	0	3/5	63/5 x (1/3)

-

X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	A_1	A_2	A_3	NK
1	1/3	-1/3	0	0	1/3	0	0	9
0	1/3	1/15	0	-1/5	-1/15	0	1/5	21/5
1	0	-2/5	0	1/5	2/5	0	-1/5	24/5

-

Baris A_2

X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	A_1	A_2	A_3	NK
0	2/3	1/3	-1	0	-1/3	1	0	12
0	1	1/5	0	-3/5	-1/5	0	3/5	63/5 x (2/3)

-

X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	A_1	A_2	A_3	NK
0	2/3	1/3	-1	0	-1/3	1	0	12
0	2/3	2/15	0	-2/5	-2/15	0	2/5	42/5
0	0	1/5	-1	2/5	-1/5	1	-2/5	18/5

Variabel Dasar	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	A_1	A_2	A_3	NK
Z	0	**0**	-12 + 1/5 M	-M	**-4 + 2/5 M**	12 – 6/5 M	0	4 – 7/5 M	444 + 18/5 M
X_1	1	0	-2/5	0	1/5	2/5	0	-1/5	24/5
A_2	0	0	1/5	-1	2/5	-1/5	1	-2/5	18/5
X_2	0	1	1/5	0	-3/5	-1/5	0	3/5	63/5

Iterasi-3

Variabel Dasar	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	A_1	A_2
Z	0	**0**	-12 + 1/5 M	-M	**-4 + 2/5 M**	12 – 6/5 M	0
X_1	1	0	-2/5	0	1/5	2/5	0
A_2	0	0	1/5	-1	**2/5**	-1/5	1
X_2	0	1	1/5	0	-3/5	-1/5	0

Variabel Dasar	A_3	NK
Z	4 – 7/5 M	444 + 18/5 M
X_1	-1/5	24/5
A_2	-2/5	18/5
X_2	3/5	63/5

Indeks terkecil 9 pada baris A_2, jd angka kunci = 2/5

Variabel dasar baru S_3, ganti baris A_2 dengan :
Kolom X_1 = 0/(2/5) = 0
Kolom X_2 = 0/(2/5) = 0
Kolom S_1 = (1/5)/(2/5) = 1/2

Kolom S_2 = -1/(2/5) = -5/2
Kolom S_3 = (2/5)/(2/5) = 1
Kolom A_1 = -(1/5)/(2/5) = - 1/2
Kolom A_2 = 1/(2/5) = 5/2
Kolom A_3 = -2/5/(2/5) = -1
Kolom NK = (18/5)/(2/5)) = 9

Baris Z

X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	A_1	A_2	A_3	NK
0	0	-12 + 1/5 M	-M	-4 + 2/5 M	12 – 6/5 M	0	4 – 7/5 M	444 + 18/5 M
0	0	1/2	-5/2	1	-1/2	5/2	-1	9 x (-4 + 2/5 M)

X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	A_1	A_2	A_3	NK
0	0	-12 + 1/5 M	-M	-4 + 2/5 M	12 – 6/5 M	0	4 – 7/5 M	444 + 18/5 M
0	0	-2 + 1/5 M	10 - M	-4 + 2/5 M	2 – 1/5 M	-10 + M	4 – 2/5 M	-36 + 18/5 M
								-
0	0	-10	-10	0	10 – M	10 – M	- M	480

Baris X_1

X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	A_1	A_2	A_3	NK
1	0	-2/5	0	1/5	2/5	0	-1/5	24/5
0	0	1/2	-5/2	1	-1/2	5/2	-1	9 x (1/5)
								-

X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	A_1	A_2	A_3	NK
1	0	-2/5	0	1/5	2/5	0	-1/5	24/5
0	0	1/10	-1/2	1/5	-1/10	1/2	-1/5	9/5
								-
1	0	-1/2	½	0	½	-1/2	0	3

Baris X_2

X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	A_1	A_2	A_3	NK
0	1	1/5	0	-3/5	-1/5	0	3/5	63/5
0	0	1/2	-5/2	1	-1/2	5/2	-1	9 x (-3/5)
								-

X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	A_1	A_2	A_3	NK
0	1	1/5	0	-3/5	-1/5	0	3/5	63/5
0	0	-3/10	3/2	-3/5	3/10	-3/2	3/5	-27/5
								-
0	1	½	-3/2	0	-1/2	3/2	0	18

Variabel Dasar	X_1	X_2	S_1	S_2	S_3	A_1	A_2	A_3	NK
Z	0	0	-10	-10	0	10 - M	10 – M	-M	480
X_1	1	0	-1/2	1/2	0	1/2	-1/2	0	3
S_3	0	0	1/2	-5/2	1	-1/2	5/2	-1	9
X_2	0	1	1/2	-3/2	0	-1/2	3/2	0	18

Krn tidak ada lagi M yang positif, maka iterasi selesai di dapat: $X_1 = 3$; $X_2 = 18$; $Z = 480$

3.4. Kasus Khusus

Ada beberapa kasus khusus dalam simpleks. Kadangkala kita akan menemukan bahwa iterasi tidak berhenti, karena syarat optimalitas atau syarat kelayakan tidak pernah dapat terpenuhi. Adakalanya juga solusi yang dihasilkan antara satu iterasi dengan iterasi berikutnya tidak berbeda. Kasus khusus ini terdiri dari solusi optimal lebih dari satu, degenerasi, solusi tidak terbatas dan solusi tidak layak. Dua yang terakhir dapat terjadi karena kesalahan baik dalam perhitungan iteratif ataupun dalam pembentukan model atau formulasi permasalahan.

1. Solusi optimal lebih dari satu

   Ketika fungsi objektif paralel terhadap pembatas yang dipenuhi dalam arti persamaan oleh solusi optimal, fungsi objektif akan mengasumsikan nilai optimal sama pada lebih dari satu titik solusi. Kondisi seperti ini kita kenal dengan solusi optimal lebih dari satu (alternative optimal).

   Perhatikan kasus berikut :

   1. Fungsi Tujuan:

      Maksimumkan $Z = 2 X_1 + 4 X_2$

   2. Fungsi Pembatas

      $X_1 + 2 X_2 \leq 5$

      $X_1 + X_2 \leq 4$

      Syarat non negative : $X_1, X_2 \geq 0$

   Hitung nilai optimum

Penyelesaian

Iterasi-0

Variabel Dasar	X_1	X_2	S_1	S_2	NK	Ratio
Z	-2	-4	0	0	0	0
A_1	1	2	1	0	5	5/2
A_2	1	1	0	1	4	2

Iterasi-1

Variabel Dasar	X_1	X_2	S_1	S_2	NK	Ratio
Z	0	0	2	0	10	
X_2	1/2	1	1/2	0	5/2	
A_2	1/2	1/2	0	-1/2	1	

Perhatikan nilai baris z untuk variabel x_1 juga menjadi nol saat x_2 berubah menjadi variabel masuk. Jika iterasi tersebut kita lanjutkan dengan memilih x_1 sebagai variabel masuk, maka akan didapatkan tabel hasil iterasi kedua berikut :

Iterasi-2

Variabel Dasar	X_1	X_2	S_1	S_2	NK	Ratio
Z	0	0	2	0	10	
X_2	0	1	1	-1	5/2	
X_1	1	0	-1	2	3/2	

Dalam praktek, pengetahuan akan solusi optimum yang lebih dari satu akan sangat bermanfaat karena manajemen mempunyai kesempatan untuk memilih salah satu sesuai dengan situasi yang mereka miliki tanpa harus merusak nilai tujuan.

2. Degenerasi

Ada kemungkinan saat akan menentukan sel keluar, rasio pembagian terkecil lebih dari satu, dan kita akan memilih salah satu secara sembarang. Jika hal ini terjadi, satu atau lebih variabel akan sama dengan nol (0) pada lakukan iterasi selanjutnya. Solusi pada iterasi dimana satu atau lebih variabel mempunyai nilai nol (0) kita sebut sebagai degenerasi. Degenerasi terjadi secara praktek karena ada minimum satu fungsi kendala yang redundan. Dalam iterasi, kita dapat mengenalinya dengan cara berikut :

Contoh:

1. Fungsi Tujuan:

   Maksimumkan $Z = 3\ X_1 + 9\ X_2$

2. Fungsi Pembatas

   $X_1 + 4\ X_2 \leq 8$

   $X_1 + 2\ X_2 \leq 4$

Syarat non negative : $X_1, X_2 \geq 0$

Tentukan solusi optimum.

Penyelesaian:

Iterasi-0

Variabel Dasar	**X_1**	**X_2**	**S_1**	**S_2**	**NK**	**Ratio**
Z	-3	-9	0	0	0	-
A_1	1	4	1	0	8	2
A_2	1	2	0	1	4	2

Kalau kita perhatikan tabel di atas, ada dua kandidat baris pivot, sehingga ada dua kandidat variabel keluar. Kita dapat memilih salah satu. Jika kita pilih baris A_1 maka solusi pada iterasi pertama adalah sebagai berikut ;

Iterasi-1

Variabel Dasar	X_1	X_2	S_1	S_2	NK	Ratio
Z	-3/4	0	9/4	0	18	-
X_2	1/4	1	1/4	0	2	8
A_2	1/2	0	1/2	1	0	0

Nilai kanan A_2 menjadi nol dan table belum optimum. Variabel X_1 menjadi variable masuk dan A_2 menjadi variable keluar. Iterasi berikutnya sebenarnya tidak mengubah solusi optimal, seperti ditunjukkan pada table berikut.:

Iterasi-2 $\longrightarrow$ Optimal

Variabel Dasar	X_1	X_2	S_1	S_2	NK	Ratio
Z	0	0	3/2	3/2	18	
X_2	0	1	1	0	-1/2	
X_1	1	0	0	1	2	

Melihat pembatas yang redundan sangat mudah menggunakan solusi grafik. Grafik dari fungsi pembatas yang redundan melewati hanya salah satu titik pada daerah penyelesaian yaitu solusi optimal, dan hal ini sebenarnya tidak berarti dalam penentuan solusi optimal. Karena tanpa garis fungsi pembatas itupun, solusi optimal sudah dapat diidentifikasikan menggunakan fungsi pembatas yang lain.

Dari sudut pandang teoritis, degenerasi mempunyai dua implikasi, yaitu:

a. Berhubungan dengan fenomena pengulangan. Iterasi 1 dan 2 hanya merupakan pengulangan yang memberikan nilai tujuan yang sama, yaitu 18. Secara umum dapat diterima, pada kasus ini prosedur simpleks akan terus berulang tanpa ada akhir tapi tidak memperbaiki solusi.

b. Meskipun variabel basis dan non basis berbeda pada setiap iterasi, tetapi nilai semua variabel dalam iterasi adalah sama, yaitu $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $s_1 = 0$, $s_2 = 0$, dan $z = 18$.

3. Solusi tidak terbatas

Adakalanya kita menemukan nilai variabel meningkat tak terbatas tanpa melanggar pembatas, yaitu ruang solusi tidak terbatas paling tidak untuk satu arah. Sebagai akibatnya, nilai tujuan akan meningkat (untuk kasus maksimasi) atau menurun (untuk kasus minimasi) tanpa ada batas. Dalam kasus ini, kita sebut ruang solusi dan nilai tujuan optimum tidak terbatas. Solusi tidak terbata hanya mengindikasikan satu hal, yaitu model yang dibangun salah. Mendapatkan keuntungan yang tidak terbatas misalnya tentu tidak masuk akal

Salah satu yang paling umum yang menyebabkan solusi tidak terbatas adalah tidak memasukkan pembatas yang bukan redundan pada model atau parameter (konstanta) beberapa pembatas tidak dihitung dengan benar.

Perhatikan kasus berikut :

1. Fungsi Tujuan:

   Maksimumkan $Z = 2 X_1 + X_2$

2. Fungsi Pembatas

   $X_1 - X_2 \leq 10$

   $2 X_1 \leq 40$

Syarat non negative: $X_1, X_2 \geq 0$

Tentukan solusi optimum.

Penyelesaian:

Iterasi-0

Variabel Dasar	**X_1**	**X_2**	**S_1**	**S_2**	**NK**	**Ratio**
Z	-2	-1	0	0	0	-
A_1	1	-1	1	0	10	10
A_2	2	0	0	1	40	20

Iterasi-1

Variabel Dasar	**X_1**	**X_2**	**S_1**	**S_2**	**NK**	**Ratio**
Z	0	-1	0	0	40	
A_1	0	-1	1	-1/2	-10	
X_1	1	0	0	1/2	20	

Jika iterasi itu diteruskan, tidak akan pernah berhenti. Nilai z akan meningkat terus. Pada tabel awal sebenarnya kita sudah dapat mengidentifikasikan bahwa nilai tujuan akan meningkat terus tanpa ada batas dengan memperhatikan koefisien pembatas kolom x_2 yang bernilai -1 dan 0. Nilai koefisien pembatas ini menunjukkan bahwa x_2 dapat dinaikkan tanpa ada batas, sehingga nilai z juga akan meningkat tanpa ada batas.

4. Solusi tidak layak

Jika pembatas tidak dapat terpenuhi secara bersamaan, maka kita berhadapan dengan solusi tidak layak. Solusi tidak layak tidak akan pernah terjadi jika semua fungsi kendala menggunakan pertidaksamaan $\leq$ (asumsikan nilai kanan adalah positif), karena variabel slack selalu memberikan solusi layak. Solusi optimal dapat terjadi jika fungsi pembatas ada yang menggunakan pertidaksamaan $\geq$, kita menggunakan variabel buatan sebagai variabel basis awal, dimana variabel buatan berdasarkan desainnya tidak memberikan solusi layak bagi model awal.

Meskipun dalam prosedur iterasinya, kita memaksa variabel buatan bernilai 0 pada solusi optimum, hal ini hanya akan terjadi jika model mempunyai ruang solusi layak. Sering juga terjadi, minimum satu variabel buatan bernilai positif pada solusi optimum. Hal ini mengindikasikan bahwa permasalahan tidak mempunyai solusi layak. Dari sudut pandang praktikal, solusi tidak layak terjadi karena model tidak diformulasikan dengan benar, dimana beberapa pembatas saling bertentangan. Hal lain yang menyebabkan solusi tidak layak adalah bahwa pembatas tidak dimaksudkan untuk dipenuhi secara bersamaan.

Perhatikan kasus berikut ini :

1. Fungsi Tujuan:

   Maksimumkan $Z = 3\ X_1 + 2\ X_2$

2. Fungsi Pembatas:

   $2\ X_1 + X_2 \leq 2$

   $3\ X_1 + 4\ X_2 \geq 12$

Syarat non negative : $X_1, X_2 \geq 0$

Tentukan solusi optimum.

Penyelesaian:

Iterasi-0

Variabel Dasar	**X_1**	**X_2**	**S_1**	**S_2**	**NK**	**Ratio**
Z	-3 – 3M	-2 – 4M	M	0	- 12 M	-
A_1	2	1	1	0	2	2
A_2	3	4	0	1	12	3

Iterasi-1

Variabel Dasar	**X_1**	**X_2**	**S_1**	**S_2**	**A_1**	**NK**
Z	1 + 5M	0	M	2 + 4 M	0	4 – 4M
X_2	2	1	1	0	0	2
A_2	5	0	-1	-4	1	4

Pada iterasi optimal, variabel buatan A_1 masih bernilai positif dan $\geq$ dari 0. Hal ini mengindikasikan bahwa ruang solusi tidak layak.

BAB 4 DUALITAS DAN SENSITIVITAS

4.1. Dualitas

Teori dualitas merupakan salah satu konsep programa linier yang penting dan menarik ditinjau dari segi teori dan praktisnya. Ide dasar yang melatarbelakangi teori ini adalah bahwa setiap persoalan program linier mempunyai suatu program linier lain yang saling berkaitan yang disebut “dual”, sedemikian sehingga solusi pada persoalan semula (yang disebut "primal”) juga memberi solusi pada dualnya.

Pendefinisian dual ini akan tergantung pada jenis pembatas, tanda - tanda variabel, dan bentuk optimasi dari persoalan primalnya. Akan tetapi, karena setiap persoalan programa linier harus dibuat dalam bentuk standar lebih dahulu sebelum modelnya dipecahkan , maka pendefinisian dibawah ini akan secara otomatis meliputi ketiga hal di atas.

Bentuk umum masalah primal dual adalah sebagai berikut :

Primal :

Maksimumkan : $z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$

Berdasarkan pembatas :

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \leq b_1$

$a_21x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \leq b_2$

. . .

$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \leq b_m$

$x_1, x_2, ..., x_n \geq 0$

Dual :

Minimumkan : $w = b_1y_1 + b_2y_2 + ... + b_my_m$

Fungsi pembatas :

$a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + ... + a_{m1}y_m \leq c_1$

$a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + ... + a_{m2}y_m \leq c_2$

...

$a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + ... + a_{mn}y_m \leq c_n$

$y_1, y_2, \ldots, y_m \geq 0$

Kalau kita bandingkan kedua persoalan di atas, ternyata terdapat korespondensi antara primal dengan dual sebagai berikut :

1. Koefisien fungsi tujuan primal menjadi konstanta ruas kanan bagi dual, sedangkan konstanta ruas kanan primal menjadi koefisien fungsi tujuan bagi dual.
2. Untuk tiap pembatas primal ada satu variaebl dual, dan untuk setiap variabel primal ada satu pembatas dual.
3. Tanda ketidaksamaan pada pembatas akan bergantung pada fungsi tujuannya.
4. Fungsi tujuan berubah bentuk (maksimasi menjadi minimasi dan sebaliknya).
5. Setiap kolom pada primal berkorespondensi dengan baris (pembatas) pada dual.
6. Setiap baris (pembatas) pada primal berkorespondensi dengan kolom pada dual.
7. Dual dari dual adalah primal.

Dalam sebuah pemodelan Pemrograman Linear, terdapat dua konsep yang saling berlawanan. Konsep yang pertama kita sebut Primal dan yang kedua Dual. Bentuk Dual adalah kebalikan dari bentuk Primal. Hubungan Primal dan Dual sebagai berikut:

Masalah Primal (atau Dual)	**Masalah Dual (atau Prima l)**
Koefisien fungsi tujuan	Nilai kanan fungsi batasan
Maksimumkan Z (atau Y)	Minimumkan Y (atau Z)
Batasan i	Variabel yi (atau xi)
Bentuk ≤	yi ≥ 0
Bentuk = ...	yi ≥ dihilangkan
Variabel Xj	Batasan j
Xj ≥ 0	Bentuk ≥
Xj ≥ 0 dihilangkan	Bentuk =

Contoh :

Masalah Primal:

Fungsi Tujuan :

Maksimumkan : $Z = 3X_1 + 5X_2$

Fungsi Pembatas:

$2X_1 \leq 8$

$3X_2 \leq 15$

$6X_1 + 5X_2 \leq 30$

$X_1, X_2 \geq 0$

Masalah Dual

Fungsi Tujuan:

Minimumkan : $G = 8Y_1 + 15Y_2 + 30Y_3$

Fungsi Pembatas :

$2Y_1 + 6Y_3 \geq 3$

$3Y_2 + 5Y_3 \geq 5$

$Y_1, Y_2, Y_3 \geq 0$

4.2. Analisis Sensitivitas

Analisis sensitivitas adalah analisis yang dilakukan untuk mengetahui akibat/pengaruh dari perubahan yang terjadi pada parameter - parameter Program Linear terhadap solusi optimal yang telah dicapai.

Ada enam tipe perubahan dalam analisis sensitivitas dengan menggunakan tabel simpleks yaitu :

1. Perubahan ko efisien fungsi tujuan untuk variabel nonbasis.
2. Perubahan koefisien fungsi tujuan untuk variabel basis.
3. Perubahan pada ruas kanan suatu pembatas.
4. Perubahan kolom untuk suatu variabel nonbasis.
5. Penambahan suatu variabel atau aktivitas baru.
6. Penambahan suatu pembatas baru.

Contoh :

1. Fungsi Tujuan:

   Maksimumkan : $Z = 150.000\ X_1 + 100.000\ X_2$

2. Fungsi Pembatas:

   Bahan A : $X_1 + X_2 \leq 600$

   Bahan B : $2\ X_1 + X_2 \leq 1000$

   Syarat Non negative : $X_1, X_2 \geq 0$

Model Simpleks Primal

1. Fungsi Tujuan : $Z = 150.000\ X_1 + 100.000\ X_2 + 0\ S_1 + 0\ S_2$

   $Z - 150.000\ X1 - 100.000\ X2 - 0\ S1 - 0\ S2 = 0$

2. Fungsi Pembatas :

   $X_1 + X_2 + S_1 = 600$

   $2\ X_1 + X_2 + S_2 = 1000$

   $X_1, X_2, S_1, S_2 \geq 0$

Tabel Simpleks

Iterasi-0

Variabel Dasar	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	NK	Indeks
Z	1	**-150.000**	-100.000	0	0	0	
S_1	0	1	1	1	0	600	600
S_2	0	**2**	1	0	1	1.000	500

Iterasi-1

Variabel Dasar	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	NK	Indeks
Z	1	0	-25.000	0	75.000	75.000.000	
S_1	0	0	**1/2**	1	-1/2	100	200
X_1	0	1	1/2	0	1/2	500	1000

Tabel solusi optimum

Variabel Dasar	Z	X_1	X_2	S_1	S_2	NK	Indeks
Z	1	0	0	50.000	50.000	80.000.000	
X_2	0	0	1	2	-1	200	
X_1	0	1	0	-1	1	400	

Untuk melakukan perubahan-perubahan parameter dalam analisis sensitivitas, perlu diperhatikan matriks invers A (A^{-1}) pada table solusi optimum di atas, yaitu :

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrik A^{-1} disebut Matrix Starting Solution yang dijadikan pedoman dalam melakukan perubahan parameter :

1. Perubahan koefisien fungsi tujuan (C_j)

Pada solusi optimum : (C_2 C_1) kalikan dengan matyrix starting solution, maka

$$\begin{bmatrix} 10 & 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20-15 & -10+15 \end{bmatrix} = [5 \quad 5] = [Y_1 \quad Y_2]$$

G = 600 (5) + 1.000 (5) = 8.000

Jika (C_2 C_1) berubah dari (10 15) menjadi (12 15), maka :

$$\begin{bmatrix} 12 & 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24-15 & -12+15 \end{bmatrix} = [9 \quad 3] = [Y_1 \quad Y_2]$$

G = 600 (9) + 1.000 (3) = 8.400

2. Perubahan kapasitas sumberdaya b_i (NK) :

Pada solusi optimum, kapasitas sumberdaya b_i (NK) yang dipergunakan adalah

$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 600 \\ 1.000 \end{bmatrix}$ maka:

$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 600 \\ 1.000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 200 \\ 400 \end{bmatrix}$, jadi $X_1 = 400$ dan $X_2 = 200$

$Z = 150.000\ X_1 + 100.000\ X_2$

$= 150.000\ (400) + 100.000\ (200)$

$= 60.000.000 + 20.000.000$

$= 80.000.000$

Jika setelah solusi optimum terjadi perubahan, misalnya :

Dari $\begin{bmatrix} 600 \\ 1.000 \end{bmatrix}$ menjadi $\begin{bmatrix} 700 \\ 1.000 \end{bmatrix}$ maka : $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 700 \\ 1.000 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 400 \\ 300 \end{bmatrix}$

Jadi : $X_1 = 300$, $X_2 = 400$ dan $Z = 150.000\ X_1 + 100.000\ X_2$

$= 150.000\ (300) + 100.000\ (400)$

$= 45.000.000 + 40.000.000$

$= 85.000.000$

BAB 5 TRANSPORTASI

Masalah transportasi berhubungan dengan distribusi suatu produk tunggal dari beberapa sumber, dengan penawaran terbatas, menuju beberapa tujuan dengan permintaan tertentu , pada biaya transport minimum. Karena hanya ada satu macam barang, suatu tempat tujuan dapat memenuhi permintaannya dari satu atau lebih sumber. Asumsi dasar model ini adalah bahwa biaya transport pada suatu rute tertentu proporsional dengan banyaknya unit yang dikirimkan. Definisi unit yang dikirimkan sangat tergantung pada jenis produk yang diangkut, satuan penawaran dan permintaan akan barang yang diangkut harus konsisten. Metode transportasi juga dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah-masalah dunia bisnis lainnya seperti :

- Masalah periklanan
- Pembelanjaan modal (capital financing)
- Alokasi dana untuk investasi
- Analisis lokasi
- Scheduling produksi
- Perencanaan

Suatu model transportasi dikatakan seimbang (balanced program) apabila total jumlah antara penawaran (supply) dan permintaan (demand) sama, secara
matematis :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} b_i$$

Model transportasi dapat dirumuskan sebagai berikut :

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} \; X_{ij}$$

dengan syarat :

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = S_i$$

(penawaran , i = 1,2,3.....,m)

$$\sum_{j=1}^{n} X_{ij} = D_j$$

(penawaran ,j = 1,2,3.....,m)

Semua $X_{ij} \geq 0$

Tabel Transportasi

Ke / Dari		Tujuan 1	Tujuan 2	Tujuan …	Tujuan n	Penawaran (Supply
Sumber	1	C_{11} X_{11}	C_{12} X_{12}	….. ….	C_{1n} X_{1n}	a_1
	2	C_{21} X_{21}	C_{22} X_{22}	….. ….	C_{2n} X_{2n}	a_2
	…	……	…. ….	….. …	…. …..	…..
	m	C_{m1} X_{m1}	C_{m2} X_{m2}	…. ….	C_{mn} X_{mn}	a_m
Permintaan (demand)		b_1	b_2	….	b_n	

KETERANGAN :

X_{ij} = unit yang dikirim dari sumber i ke tujuan j
C_{ij} = biaya perunit dari sumber i ke tujuan j
a_i = kapasitas penawaran (supply) dari sumber i
b_i = kapasitas permintaan (demand) dari tujuan j
i = 1,2.......m
j = 1,2.......n

Ada 3 metode yang digunakan untuk menentukan solusi awal, yaitu:

1. Metode Pojok Barat Laut
2. Metode Biaya Terendah
3. Metode Aproximasi Vogel

5.1. Metode Pojok Barat Laut

Solusi awal menggunakan metode pojok barat laut ditentukan dengan mengisi sel kosong yang masih dapat diisi dan terletak paling kiri atas (sudut barat laut). Jumlah yang dialokasikan pada sel kosong tersebut tidak boleh melebihi jumlah suplai pada sumber i dan jumlah permintaan j pada tujuan.

Langkah-langkah Metode Pojok Barat Laut adalah sebagai berikut :

1. Dimulai dengan mengisi kotak pojok barat laut yaitu sel (1,1) sehingga X_{11} = min $\{a_1,b_1\}$

   Terdapat 3 kemungkinan, yaitu :

   a. Jika $a_1 > b_1$, maka $X_{11} = b_1$, kemudian dilanjutkan langkah mendatar yaitu : X_{12} = min $\{a_1 - X_{11}, b_1\}$.

   b. Jika $a_1 = b_1$, maka $X_{11} = b_1 = a_1$, kemudian dilanjutkan langkah miring yaitu : X_{22} = min $\{a_2, b_2\}$.

   c. Jika $a_1 < b_1$, maka $X_{11} = a_1$, kemudian dilanjutkan langkah turun yaitu: X_{21} = min $\{a_2, b_1 - X_{11}\}$.

2. Langkah diatas diulangi sambil melangkah menuju arah tenggara atau kotak (m,n) atau ke arah pojok kanan bawah.

Contoh

Dari 3 buah pelabuhan A_1, A_2 dan A_3 terdapat semen sebanyak asing-masing 120 ton, 170 ton dan 160 ton. Semen tersebut akan diangkut ke kota T_1, T_2 dan T_3 yang masing-masing mempunyai daya tampung 150 ton, 210 ton dan 90 ton. Biaya pengiriman dari pelabuhan A_1 ke kota T_1, T_2 dan T_3 masing-masing adalah 50, 100 dan 100 (dalam ribuan rupiah/ton). Biaya pengiriman dari pelabuhan A_2 ke kota T_1, T_2 dan T_3 adalah 200, 300 dan 200, sedangkan biaya pengiriman dari pelabuhan A_3 ke kota T_1, T_2 dan T_3 adalah 100, 200 dan 300.

Tentukan :

a). Tabel Transportasi !

b). Model Transportasi !

c). Ongkos Awal dengan Metode Pojok Barat Laut !

Penyelesaian :

a). Tabel Transportasi:

Sumber	Tujuan			a_i
	T_1	T_2	T_3	
A_1	50 X_{11}	100 X_{12}	100 X_{13}	120
A_2	200 X_{21}	300 X_{22}	200 X_{23}	170
A_3	100 X_{31}	200 X_{32}	300 X_{33}	160
b_j	150	210	90	450

b). Model Transportasi:

Fungsi Tujuan :

Meminimumkan : $Z = (50\ X_{11} + 100\ X_{12} + 100\ X_{13} + 200\ X_{21} + 300\ X_{22} + 200\ X_{23} + 100\ X_{31} + 200\ X_{32} + 300\ X_{33})$ x Rp. 1.000,-

Fungsi Kendala:

a). Keterbatasan Kapasitas Sumber ke-1 (A_1): $X_{11} + X_{12} + X_{13} = 120$

b). Keterbatasan Kapasitas Sumber ke-2 (A_2): $X_{21} + X_{22} + X_{23} = 170$

c). Keterbatasan Kapasitas Sumber ke-3 (A_3): $X_{31} + X_{32} + X_{33} = 160$

d). Keterbatasan Kapasitas Tujuan ke-1 (T_1): $X_{11} + X_{21} + X_{31} = 150$

e). Keterbatasan Kapasitas Tujuan ke-2 (T_2): $X_{12} + X_{22} + X_{32} = 210$

f). Keterbatasan Kapasitas Tujuan ke-3 (T3): $X_{13} + X_{23} + X_{33} = 160$

Syarat Non Negatif : $Xij \geq 0$, untuk i = 1, 2, 3 dan j = 1, 2, 3

c). Ongkos Awal dengan Metode Pojok Barat Laut:

Langkah-langkahnya adalah sebagai berikut:

Dimulai dari sel (1,1) yaitu menentukan nilai dari X11 = min {a1,b1} = min{120, 150}

$X_{11} = 120$. Maka A_1 habis, dilanjutkan ke bawah yaitu sel (2,1) yaitu :

$X^{21} = \min \{a_2, b_1 - X_{11}\} = \min\{170,150-120\} = 30$ (T_1 terpenuhi).

$X_{22} = \min \{a_2 - X_{21}, b_2\} = \min\{170-30,210\} = 140$ (A_2 habis).

$X_{32} = \min \{a_3, b_2 - X_{22}\} = \min\{160,210-140\} = 70$ (T_2 terpenuhi).

X_{33} = min {a_3 - X_{32}, b_3 } = min{160 - 90, 90} = 90 (T_3 dan A_3 terpenuhi).

Sehingga tabelnya menjadi:

Sumber	Tujuan			a_i
	T_1	T_2	T_3	
A_1	50 120	100	100	120
A_2	200 30	300 140	200	170
A_3	100	200 70	300 90	160
b_j	150	210	90	450

Jadi variabel-variabel basisnya adalah : X_{11}, X_{21}, X_{22}, X_{32}, dan X_{33}.

Sedangkan variabel-variabel non basisnya adalah : X_{12}, X_{13}, X_{23}, dan X_{31}.

Biaya awalnya adalah :

Z = C_{11} X_{11} + C_{21} X_{21} + C_{22} X_{21} + C_{32} X_{32} + C_{33} X_{33}

= (50.120 + 200.30 + 300.140 + 200.70 + 300.90) x Rp. 1.000,-

= (6.000 + 6.000 + 42.000 + 14.000 + 27.000) x Rp. 1.000,-

= Rp. 95.000.000,-

5.2. Metode Biaya Terendah

Penentuan solusi fisibel basis awal dengan menggunakan Metode Biaya Terendah tidak hanya mempertimbangkan barang yang harus didistribusikan saja tetapi sekaligus mempertimbangkan faktor biaya. Terdapat 2 cara dalam menentukan solusi fisibel basis awal dengan menggunakan Metode Biaya Terendah yaitu : Metode Biaya Baris Terendah dan Metode Biaya Kolom Terendah.

i). Metode Biaya Baris Terendah

Langkah-langkah yang digunakan :

Dimulai dari baris ke-1. Tentukan X_{1k} = min { a_1, b_k }

dimana k = kolom pada baris ke-1 yang mempunyai biaya terendah.

Kemungkinan-kemungkinan yang ada untuk X_{1k} dan tindak lanjutnya adalah :

1. Jika $X_{1k} = a_1$, maka proses dilanjutkan ke baris ke-2, dengan memikirkan baris ke-1 telah terpenuhi.
2. Jika $X_{1k} = b_k$, maka lanjutkan ke kolom k, selanjutnya tentukan lagi ongkos terkecil pada baris ke-1 sehingga baris ke-1 terpenuhi.
3. Jika dalam proses dijumpai 2 atau lebih biaya terendah yang terletak pada suatu baris yang sama, dapat dipilih sembarang, demikian pula jika terdapat baris dan kolom yang dapat terpenuhi secara serentak, tinggalkan kolom yang bersangkutan dan lanjutkan memilih biaya terendah (sisanya) pada baris tersebut. Sel yang memuat baris seperti diatas dinyatakan sebagai baris berharga nol.

Contoh :

Diketahui table transportasi sebagai berikut:

Sumber	Tujuan					a_i
	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	
A_1	3 X_{11}	1 X_{12}	2 X_{13}	4 X_{14}	5 X_{15}	75
A_2	2 X_{21}	3 X_{22}	2 X_{23}	2 X_{24}	4 X_{25}	30
A_3	3 X_{31}	4 X_{32}	5 X_{33}	2 X_{34}	1 X_{35}	65
A_4	4 X_{41}	3 X_{42}	1 X_{43}	2 X_{44}	1 X_{45}	80
b_j	50	40	45	75	40	250

Tentukanlah Biaya awal dengan Metode Biaya Baris Terendah!

Penyelesaian:

Langkah-langkahnya adalah sebagai berikut:

1. Baris-1

   Biaya terendah terletak pada kolom-2 yaitu 1, maka:

   X_{12} = Min{a_1, b_2} = Min{75, 40} = 40. Jadi kolom ke-2 (T_2) terpenuhi. Karena a_2 belum habis (baris 1 terpenuhi), pilih biaya terendah berikutnya yaitu 2 yang terletah pada kolom-3, maka:

X_{13} = Min{a_1 - X_{12}, b_3} = Min{75-40, 45} = 35 dengan demikian baris-1 (A_1) terpenuhi.

2. Baris-2

   Biaya terendah pada baris ke-2 terletak pada kolom-1, 3, dan 4 yaitu 2 (dapat dipilih salah 1, tetapi juga dapat menggunakan prinsip mengalokasikan komoditas sebanyak-banyaknya pada ongkos yang terkecil), sehingga dapat menggunakan cara :

   Max{Min(a_2, b_1), Min(a_2, b_3 - X_{13}), Min(a_2, b_4)} = Max{Min(30, 50), Min(30, 10), Min(30, 75)} = Max{30, 10, 30} = 30. Sehingga dapat diplih X_{21} atau X_{24} sebagai variable basis. dipilih X_{21} sehingga X_{21} = 30 sehingga baris-2 (A_2) terpenuhi. (Bagaimana jika dipilih X_{24} sebagai variable basis ?, tentukan biaya awalnya!)

3. Baris-3

   Biaya terendah terletak pada kolom-5 yaitu 1, maka:

   X_{35} = Min{a_3, b_5} = Min {65 , 40} = 40 (kolom-5 (T_5) Terpenuhi. Biaya terendah berikutnya terletak pada kolom-4 yaitu 2, maka :

   X_{34} = Min{a_3 − X35, b_4} = Min {65 − 40 , 75} = 25 sehingga baris-3 (A_3) terpenuhi.

4. Baris-4

   Biaya terendah terletak pada kolom-3 dan 5 yaitu 1 (pilih kolom 3, karena kolom 5 sudah terpenuhi), maka :

   X_{43} = Min{a_4, b_3 − X_{13}} = Min {80 , 45 - 35} = 10 sehingga kolom-3 (T_3) terpenuhi, selanjutnya untuk biaya terendah berikutnya terletak pada kolom-4 yaitu 2, maka:

   X_{44} = Min{a_4 - X_{43}, b_4 − X_{34}} = Min{80 − 10, 75 − 25} = Min{70, 50} = 50, yang tersisa tinggal kolom-1 sehingga :

   X_{41} = Min{a_4 - $X_4$3 - X_{44}, b_1 - X_{21}} = Min{80 – 10 - 50, 50 - 30} = 20, dengan demikian kolom-1 (T_1) dan baris-4 (A_4) terpenuhi. Sehingga tabelnya menjadi:

Sumber	Tujuan					a_i
	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	
A_1	3	1 / 40	2 / 35	4	5	**75**
A_2	2 / 30	3	2	2	4	**30**
A_3	3	4	5	2 / 25	1 / 40	**65**
A_4	4 / 20	3	1 / 10	2 / 50	1	**80**
b_j	**50**	**40**	**45**	**75**	**40**	**250**

Biaya awalnya adalah :

$$Z = C_{12} X_{12} + C_{13} X_{13} + C_{21} X_{21} + C_{34} X_{34} + C_{35} X_{35} + C_{41} X_{41} + C_{43} X_{43} + C_{44} X_{44}$$
$$= 1(40) + 2(35) + 2(30) + 2(25) + 1(40) + 4(20) + 1(10) + 2(50)$$
$$= 40 + 70 + 60 + 50 + 40 + 80 + 10 + 100$$
$$= 450.$$

5.3. Metode Aproximasi Vogel (VAM)

Aproksimasi Vogel selalu memberikan solusi awal yang lebih baik dibanding metode Pojok Barat Laut dan Metode Biaya Terendah. Kenyataannya pada beberapa kasus, solusi awal yang diperoleh melalui VAM akan optimum. VAM melakukan alokasi dalam suatu cara yang akan meminimumkan penalty (opportunity cost) dalam memilih kotak yang salah untuk suatu lokasi.

Proses Aproksimasi Vogel :

1. Hitung opportunity cost untuk setiap baris dan kolom. Opportunity cost untuk setiap baris I dihitung dengan mengurangkan nilai C_{ij} terkecil pada baris itu dari nilai C_{ij} satu tingkat lebih besar pada baris yang sama. Opportunity cost kolom diperoleh dengan cara yang serupa. Biaya-biaya ini adalah penalty karena tidak memilih kotak dengan biaya minimum

2. Pilih baris atau kolom dengan opportunity cost terbesar (jika terdapat nilai kembar pilih secara sembarang). Alokasikan sebanyak mungkin ke kotak dengan nilai C_{ij} minimum pada baris atau kolom yang dipilih. Untuk C_{ij} terkecil, X_{ij} = minimum $[S_i, D_j]$. Artinya penalty terbesar dihindari.
3. Sesuaikan penawaran dan permintaan untuk menunjukan alokasi yang sudah dilakukan. Hilangkan semua baris dan kolom dimana penawaran dan permintaan telah dihabiskan.
4. Jika semua penawaran dan permintaan belum dipenuhi,kembali ke langkah 1 dan hitung lagi opportunity cost yang baru. Jika semua penawaran dan permintaan, solusi telah diperoleh.

5.4. Menentukan Solusi Optimum

Dua metode yang digunakan untuk mencari solusi optimum yaitu Stepping-Stone dan metode Modified Distribution

1. Metode *Stepping Stone*

Metode ini dalam merubah alokasi produk untuk mendapatkan alokasi produksi yang optimal menggunakan cara *trial and error* atau coba – coba. Walaupun merubah alokasi dengan cara coba- coba, namun ada syarat yang harus diperhatikan yaitu dengan melihat pengurangan biaya per unit yang lebih besar dari pada penambahan biaya per unitnya. Untuk mempermudah penjelasan, berikut ini akan diberikan sebuah contoh.

Suatu perusahaan mempunyai tiga pabrik di A_1, A_2, A_3. Dengan kapasitas produksi tiap bulan masing- masing 90 ton, 60 ton, dan 50 ton; dan mempunyai tiga gudang penjualan di T_1, T_2, T_3 dengan kebutuhan tiap bulan masing- masing 50 ton, 110 ton, dan 40 ton. Biaya pengangkutan setiap ton produk dari pabrik A_1, A_2, A_3 ke gudang T_1, T_2, T_3 adalah sebagai berikut:

Sumber	Tujuan (Biaya dalam ribuan rp)		
	T_1	**T_2**	**T_3**
A_1	20	5	8
A_2	15	20	10
A_3	25	10	19

Tentukan alokasi hasil produksi dari pabrik – pabrik tersebut ke gudang – gudang penjualan dengan biaya pengangkutan terendah.

Penyelesaian:

Tabel awal

Sumber	Tujuan (Biaya dalam ribuan rp)			a_i
	T_1	**T_2**	**T_3**	
A_1	20 X_{11}	5 X_{12}	8 X_{13}	**90**
A_2	15 X_{21}	20 X_{22}	10 X_{23}	**60**
A_3	25 X_{31}	10 X_{32}	19 X_{33}	**50**
b_j	**50**	**110**	**40**	**200**

Pedoman prosedur alokasi tahap pertama adalah metode pojok barat laut *(North West Corner Method)* yaitu pengalokasian sejumlah maksimum produk mulai dari sudut kiri atas (X_{11}) dengan melihat kapasitas pabrik dan kebutuhan gudang.

Sumber	Tujuan (Biaya dalam ribuan rp)			a_i
	T_1	**T_2**	**T_3**	
A_1	20 50	5 40	8 X_{13}	**90**
A_2	15 X_{21}	20 60	10 X_{23}	**60**
A_3	25 X_{31}	10 10	19 40	**50**
b_j	**50**	**110**	**40**	**200**

Biaya Pengangkutan untuk alokasi tahap pertama sebesar = 50 (20) + 40 (5) + 60 (20) + 10 (10) + 40 (19) = 3260.

Merubah alokasi secara *trial and error*

Perubahan bisa dari kotak terdekat atau bisa juga pada kotak yang tidak berdekatan dengan melihat pengurangan biaya per unit yang lebih besar dari pada penambahan biaya per unit. Misalnya akan dicoba perubahan dari kotak X_{11} ke kotak X_{21} artinya 50 ton kebutuhan gudang T_1 akan dikirim dari pabrik A_2 dan bukan dari pabrik A_1. Perubahan alokasi produk dari dua kotak tersebut akan mengakibatkan berubahnya alokasi produk kotak lainnya yang terkait (kotak X_{22} dan kotak X_{12}). Untuk itu sebelum dilakukan perubahan perlu dilihat penambahan dan pengurangan biaya transportasi per unitnya sebagai berikut:

Penambahan biaya: dari A_2 ke T_1 = 15
dari A_1 ke T_2 = 5 +

15

Pengurangan biaya : dari A_1 ke T_1 = 20
dari A_2 ke T_2 = 20 +

40

Karena pengurangan biaya per unit lebih besar dari penambahan biaya maka perubahan dapat dilakukan.

Perbaikan pertama dengan cara *trial and Error*

Sumber	Tujuan (Biaya dalam ribuan rp)			a_i
	T_1	T_2	T_3	
A_1	20 X_{11}	5 90	8 X_{13}	90
A_2	15 50	20 10	10 X_{23}	60
A_3	25 X_{31}	10 10	19 40	50
b_j	50	110	40	200

Biaya Pengangkutan untuk alokasi tahap pertama sebesar = 90 (5) + 50 (15) + 10 (20) + 10 (10) + 40 (19) = 2260.

Penambahan biaya: dari A_1 ke T_3 = 8

dari A_3 ke T_2 = 10 +

18

Pengurangan biaya : dari A_1 ke T_2 = 5

dari A_3 ke T_3 = 19 +

24

Perbaikan kedua dengan cara *trial and error*

Sumber	**Tujuan (Biaya dalam ribuan rp)**			**a_i**
	T_1	**T_2**	**T_3**	
A_1	20 X_{11}	5 50	8 40	**90**
A_2	15 50	20 10	10 X_{23}	**60**
A_3	25 X_{31}	10 50	19 X_{33}	**50**
b_j	**50**	**110**	**40**	**200**

Biaya Pengangkutan untuk perbaikan kedua sebesar = 50 (5) + 40 (80) + 50 (15) + 10 (20) + 50 (10) = 2020.

Penambahan biaya: dari A_1 ke T_2 = 5

dari A_2 ke T_3 = 10 +

15

Pengurangan biaya : dari A_2 ke T_2 = 20

dari A_1 ke T_3 = 8 +

28

Perbaikan ketiga dengan cara *trial and error*

Sumber	Tujuan (Biaya dalam ribuan rp)			a_i
	T_1	T_2	T_3	
A_1	20 X_{11}	5 60	8 30	**90**
A_2	15 50	20 X_{22}	10 10	**60**
A_3	25 X_{31}	10 50	19 X_{33}	**50**
b_j	**50**	**110**	**40**	**200**

Biaya Pengangkutan untuk perbaikan ketiga sebesar = 60 (5) + 30 (8) + 50 (15) + 10 (10) + 50 (10) = 1890 (biaya pengangkutan terendah)

Sehingga alokasi produksi dengan biaya terendah adalah:

- 90 unit produksi dari pabrik A_1 dialokasikan ke gudang T_2 sebanyak 60 unit dan ke gudang T_3 sebanyak 30 unit.
- 60 unit produksi dari pabrik A_2 dialokasikan ke gudang T_1 sebanyak 50 unit dan ke gudang T_3 sebanyak 10 unit.
- 50 unit produksi dari pabrik A_3 dialokasikan ke gudang T_2 sebanyak 50 unit.

2. Metode Modified Distribution (MODI)

Metode ini dalam merubah alokasi produk untuk mendapatkan alokasi produksi yang optimal menggunakan suatu indeks perbaikan yang berdasarkan pada nilai baris dan nilai kolom. Cara untuk penentuan nilai baris dan nilai kolom menggunakan persamaan:

Ri + Kj = Cij

Dimana :

Ri = Nilai baris ke-i

Kj = Nilai kolom ke-j

Cij = biaya pengangkutan 1 unit barang dari sumber I ke tujuan j.

Pedoman prosedur alokasi tahap pertama mengggunakan prosedur pedoman sudut barat laut *(North West Corner rule)*. Untuk metode MODI ada syarat yang harus dipenuhi, yaitu **banyaknya kotak terisi harus sama dengan banyaknya baris ditambah banyaknya kolom dikurang satu**. Untuk mempermudah penjelasan, berikut ini akan diberikan sebuah contoh. Suatu perusahaan mempunyai tiga pabrik di A_1, A_2, A_3. Dengan kapasitas produksi tiap bulan masing- masing 90 ton, 60 ton, dan 50 ton; dan mempunyai tiga gudang penjualan di T_1, T_2, T_3 dengan kebutuhan tiap bulan masing- masing 50 ton, 110 ton, dan 40 ton. Biaya pengangkutan setiap ton produk dari pabrik A_1, A_2, A_3 ke gudang T_1, T_2, T_3 adalah sebagai berikut:

Sumber	**Tujuan (Biaya dalam ribuan rp)**		
	T_1	**T_2**	**T_3**
A_1	20	5	8
A_2	15	20	10
A_3	25	10	19

Tentukan alokasi hasil produksi dari pabrik – pabrik tersebut ke gudang – gudang penjualan dengan biaya pengangkutan terendah.

Solusi:

1. Isilah tabel pertama dari sudut kiri atas

Sumber	**Tujuan (Biaya dalam ribuan rp)**			**Kapasitas Pabrik**
	T_1	**T_2**	**T_3**	
A_1	20 50	5 40	8 X_{13}	**90**
A_2	15 X_{21}	20 60	10 X_{23}	**60**
A_3	25 X_{31}	10 10	19 40	**50**
Kebutuhan Gudang	**50**	**110**	**40**	**200**

Biaya pengangkutan untuk alokasi tahap pertama sebesar = 50 (20) + 40 (5) +60 (20) +10 (10) + 40 (19) = 3260.

2. Menentukan nilai baris dan kolom

- Baris pertama selalu diberi nilai nol

  Nilai baris W = Rw = 0

- Nilai baris yang lain dan nilai semua kolom ditentukan berdasarkan persamaan

  $R_i + K_j = C_{ij}$

  $R_{A1} + K_{T1} = C_{A1T1} \longrightarrow 0 + K_{T1} = 20$

  $K_{T1} = 20$ = nilai kolom T_1

  $R_{A1} + K_{T2} = C_{A1T2} \longrightarrow 0 + K_{T2} = 5$

  $K_{T2} = 20$ = nilai kolom T_2

  $R_{A2} + K_{T2} = C_{A2T2} \longrightarrow R_{A2} + 5 = 20$

  $K_{A2} = 15$ = nilai baris A_2

  $R_{A3} + K_{T2} = C_{A3T2} \longrightarrow R_{A3} + 5 = 10$

  $K_{A3} = 5$ = nilai baris A_3

  $R_{A3} + K_{T3} = C_{A3T3} \longrightarrow 5 + K_{T3} = 19$

  $K_{T3} = 14$ = nilai kolom A_3

3. Menghitung indeks perbaikan dan memilih titik tolak perbaikan.

Indeks perbaikan adalah nilai dari kotak yang kosong.

Kotak	Indeks Perbaikan = $C_{ij} - R_i - K_j$
A_1T_3	8 – 0 – 14 = -6
A_2T_1	15 – 15 – 20 = - 20 $\longrightarrow$ titik tolak perubahan

A_2T_3 10 – 15 – 14 = -19

A_3T_1 25 – 5 – 20 = 0

Memilih titik tolak perubahan:

- Kotak yang mempunyai indeks perbaikan negatif berarti bila diberi alokasi akan mengurangi jumlah biaya pengangkutan. Bila nilainya positif berarti pengisian akan menyebabkan kenaikan biaya pengangkutan

- Kotak yang merupakan titik tolak perubahan adalah kotak yang indeksnya bertanda negatif dan angkanya besar. Dalam contoh ternyata yang memenuhi syarat adalah kotak A_2T_1 dengan nilai -20.

Memperbaiki Alokasi

Sumber	**Tujuan (Biaya dalam ribuan rp)**			**Kapasitas Pabrik**
	T_1	**T_2**	**T_3**	
A_1	[20] X_{11}	[5] 90	[8] X_{13}	**90**
A_2	[15] 50	[20] 10	[10] X_{23}	**60**
A_3	[25] X_{31}	[10] 10	[19] 40	**50**
Kebutuhan Gudang	**50**	**110**	**40**	**200**

Biaya pengangkutan untuk alokasi tahap kedua sebesar = 90 (5) + 50 (15) + 10 (20) +10 (10) + 40 (19) = 2260

4. Ulangi langkah – langkah tersebut diatas, mulai langkah 2.2 sampai diperolehnya biaya terendah, yaitu bila sudah tidak ada lagi indeks yang negatif.

$R_{A1} = 0$

$R_{A1} + K_{T2} = C_{A1T2} \longrightarrow 0 + K_{T2} = 5$

$K_{T2} = 5$ = nilai kolom T_2

$R_{A2} + K_{T2} = C_{A2T2} \longrightarrow R_{A2} + 5 = 20$

$K_{A2} = 15$ = nilai baris A_2

$R_{A2} + K_{T1} = C_{A2T1} \longrightarrow 15 + K_{T1} = 15$

$K_{T1} = 0$ = nilai kolom T_1

$R_{A3} + K_{T2} = C_{A3T2} \longrightarrow R_{A3} + 5 = 10$

$K_{T2} = 5$ = nilai baris A_3

$R_{A3} + K_{T3} = C_{A3T3} \longrightarrow 5 + K_{T3} = 19$

$K_{T3} = 14$ = nilai kolom T_3

Indeks perbaikan adalah nilai dari kotak yang kosong.

Kotak	Indeks Perbaikan = $C_{ij} - R_i - K_j$
-------	--
A_1T_1	$20 - 0 - 0 = 20$
A_1T_3	$8 - 0 - 14 = -6$
A_2T_3	$10 - 15 - 4 = -9 \longrightarrow$ titik tolak perubahan
A_3T_1	$25 - 5 - 0 = 20$

Alokasi baru

Sumber	**Tujuan (Biaya dalam ribuan rp)**			**Kapasitas Pabrik**
	T_1	**T_2**	**T_3**	
A_1	20 X_{11}	5 90	8 X_{13}	**90**
A_2	15 50	20 X_{22}	10 10	**60**
A_3	25 X_{31}	10 20	19 30	**50**
Kebutuhan Gudang	**50**	**110**	**40**	**200**

Biaya pengangkutan untuk alokasi tahap ketiga sebesar = 90 (5) + 50 (15) + 10 (10) +20 (10) + 30 (19) = 2070

$R_{A1} = 0$

$R_{A1} + K_{T2} = C_{A1T2} \longrightarrow 0 + K_{T2} = 5$

$K_{T2} = 5$ = nilai kolom T_2

$R_{A3} + K_{T2} = C_{A3T2} \longrightarrow R_{A3} + 5 = 10$

$R_{A3} = 5$ = nilai baris A_2

$R_{A3} + K_{T3} = C_{A3T3} \longrightarrow 5 + K_{T3} = 19$

$K_{T3} = 14$ = nilai kolom T_3

$R_{A2} + K_{T3} = C_{A2T3} \longrightarrow R_{A2} + 14 = 10$

$R_{A2} = -4$ = nilai baris A_2

$R_{A2} + K_{T1} = C_{A2T1} \longrightarrow -4 + K_{T1} = 15$

$K_{T1} = 19$ = nilai Kolom T_1

Indeks perbaikan adalah nilai dari kotak yang kosong.

Kotak	Indeks Perbaikan = $C_{ij} - R_i - K_j$
A_1T_1	$20 - 0 - 19 = 1$
A_1T_3	$8 - 0 - 14 = -6 \longrightarrow$ titik tolak perubahan
A_2T_2	$20 - (-4) - 5 = 19$
A_3T_1	$25 - 5 - 19 = 1$

Alokasi baru

Sumber	**Tujuan (Biaya dalam ribuan rp)**			**Kapasitas Pabrik**
	T_1	**T_2**	**T_3**	
A_1	20 X_{11}	5 60	8 30	**90**
A_2	15 50	20 X_{22}	10 10	**60**
A_3	25 X_{31}	10 50	19 X_{33}	**50**
Kebutuhan Gudang	**50**	**110**	**40**	**200**

Biaya pengangkutan untuk alokasi tahap keempat sebesar = 60 (5) + 30 (8) + 50 (15) + 10 (10) + 50 (10) = 1890

$R_{A1} = 0$

$R_{A1} + K_{T2} = C_{A1T2} \longrightarrow 0 + K_{T2} = 5$

$K_{T2} = 5$ = nilai kolom T_2

$R_{A1} + K_{T3} = C_{A1T3} \longrightarrow 0 + K_{T3} = 8$

$K_{T3} = 8$ = nilai kolom T_3

$R_{A2} + K_{T3} = C_{A2T3} \longrightarrow R_{A2} + 8 = 10$

$R_{A2} = 2$ = nilai baris A_2

$R_{A2} + K_{T1} = C_{A2T1} \longrightarrow 2 + K_{T1} = 15$

$K_{T1} = 13$ = nilai kolom T_1

$R_{A3} + K_{T2} = C_{A3T2} \longrightarrow R_{A3} + 5 = 10$

$R_{A3} = 5$ = nilai baris A_3

Indeks perbaikan adalah nilai dari kotak yang kosong.

Kotak	Indeks Perbaikan = $C_{ij} - R_i - K_j$
A_1T_1	20 – 0 – 13 = 7
A_2T_2	20 – 2 – 5 = 13
A_3T_1	25 – 5 – 13 = 7
A_3T_3	19 – 5 – 8 = 6

Alokasi tahap keempat merupakan alokasi optimal karena indeks perbaikan pada kotak kosong sudah tidak ada yang bernilai negatif.

5.5 Transportasi Tidak Seimbang

Sering muncul permasalahan penawaran tidak seimbang dengan permintaan.

Misalkan : Permintaan 650 ton sedangkan penawaran 600 ton. Untuk mengatasi persoalan ini ditambahkan peubah dummy pada baris.

Sumber	Kapasitas yang tersedia
A_1	150 ton
A_2	175 ton
A_3	275 ton
Total	600 ton

Tujuan	Permintaan
T_1	200 ton
T_2	100 ton
T_3	350 ton
Total	650 ton

Permintaan 650 ton sedangkan penawaran 600 ton. Untuk mengatasi persoalan ini ditambahkan peubah dummy pada baris. Suatu model tidak seimbang (Permintaan > Penawaran).

Sumber	**Tujuan (Biaya dalam ribuan rp)**			**Kapasitas Pabrik**
	T_1	**T_2**	**T_3**	
A_1	6	8	10	**150**
A_2	7	11	11	**175**
A_3	4	5	12	**275**
Dummy	0	0	0	**50**
Kebutuhan Gudang	**200**	**100**	**150**	**350**

Baris dummy ditugaskan untuk memasok sebanyak 50 ton. Permintaan tambahan sebesar 50 ton yang tidak akan dipasok, akan dialokasikan ke sebuah sel dalam baris dummy. Sel – sel dummy ini sebenarnya merupakan variable pengurang.

Penambahan sebuah baris atau kolom dummy tidak mempengaruhi solusi awal atau metode untuk menentukan solusi optimal. Sel – sel baris atau kolom dummy diperlakukan sama seperti sel lainnya dalam Tabel.

BAB 6 PENUGASAN

6.1. Bentuk Umum

Metode Penugasan atau *assignment* atau *Hungarian method* merupakan metode untuk menentukan alokasi sumber daya ke suatu tugas terterntu secara satu persatu *(one by one)*. Misalkan, tersedia 5 orang perawat yang harus ditugaskan pada 5 klinik yang tersedia, bagaimana penugasan terbaiknya? Bila ada 10 kolonel untuk 10 jabatan tertentu, bagaimana penugasan terbaiknya? Hal ini tergantung kepada informasi yang ada. Penyelesaian ini dapat diarahkan kepada maksimasi atau minimasi. Bila berkait dengan kesalahan, kerugian, cacat, dan hal-hal yang negatif, itu berarti persoalan minimasi. Sebaliknya, bila berkait dengan perolehan, prestasi, dan hal-hal yang positif, itu berarti persoalan maksimasi.

1. Contoh kasus Maksimasi

Pada sebuah bengkel tersedia 4 orang mekanik yang harus dapat ditempatkan pada 4 bengkel yang ada (1 mekanik untuk 1 bengkel). Pemilik bengkel telah memperoleh data nilai prestasi keempat mekanik pada keempat bengkel sebagai berikut.

Mekanik (M)	Bengkel (B)			
	B_1	B_2	B_3	B_4
M_1	67	76	82	75
M_2	80	70	65	77
M_3	77	68	70	74
M_4	70	73	78	80

Prestasi mekanik M, di bengkel B_3 adalah 82, prestasi mekanik M_3 di bengkel B. adalah 77, dan seterusnya (prestasi maksimal 100).

Bagaimana penugasan terbaiknya yang dapat menghasilkan prestasi mekanik bengkel keseluruhan adalah yang terbesar?

Dengan cara coba- coba, satu per satu dapat ditampilkan 4 x 3 x 2 x 1 (= 24 atau 4 faktorial) altematif.

Misal untuk kasus tersebut:
Penugasan 1 = M_1 di B_1; M_2 di B_2; M_3 di B_3; dan M_4 di B_4
Total prestasi = 67 + 70 + 80 + 80 = 297

Penugasan 2 = M_1, di B_1; M_2 di B_2; M_3 di B_4; dan M_4 di B_3
Total prestasi = 67 + 70 + 74 + 78 = 289

Dan seterusnya hingga ke ....

Penugasan 16: M_1, di B_4; M_2 di B_3; M_3 di B_2; dan M_4 di B_1.
Total prestasi = 75 + 65 + 68 + 70 = 278

Metode ***Hungarian*** dapat lebih memastikan jawaban secara cepat dan akurat! Langkah penyelesaian metode *Hungarian* (untuk maksimasi), adalah:

1. Lakukan operasi baris, yaitu dengan mengurangkan semua nilai pada baris dengan nilai terbesarnya (operasi per baris untuk mendapatkan nilai 0 pada tiap barisnya).
2. Lakukan operasi kolom untuk memastikan bahwa pada tiap kolom ada nilai 0 (lakukan pengurangan terhadap nilai terbesar hanya pada kolom yang tidak memiliki nilai 0).
3. Lakukan penugasan terbaiknya (merujuk kepada elemen yang bernilai 0 atau terbesar, dipilih dan dipilah sendiri), dengan cara:
   a. Penugasan pertama kali pada baris dan kolom yang memiliki satu-satunya nilai O.
   b. Penugasan berikutnya pada baris saja atau kolom saja yang memiliki satu-satunya nilai 0.
   c. Kerjakan terus hingga selesai dan diperoleh nilai terbesar.

   Hasil langkah a, b dan c untuk persoalan mekanik bengkel adalah sebagai berikut:

Data awal :

Mekanik (M)	Bengkel (B)			
	B_1	B_2	B_3	B_4
M_1	67	76	82	75
M_2	80	70	65	77
M_3	77	68	70	74
M_4	70	73	78	80

1. ***Operasi baris:***
   a. Semua elemen pada baris 1 dikurangi dengan 82.
   b. Semua elemen pada baris 2 dikurangi dengan 80.
   c. Semua elemen pada baris 3 dikurangi dengan 77.
   d. Semua elemen pada baris 4 dikurangi dengan 80.

   Hasilnya adalah sebagai berikut:

Mekanik (M)	Bengkel (B)			
	B_1	B_2	B_3	B_4
M_1	-15	-6	0	-7
M_2	0	-10	-15	-3
M_3	0	-9	-7	-3
M_4	-10	-7	-2	0

Tidak ada Nilai nol

2. ***Operasi kolom:***

Pada kolom 2 masih ada yang belum memiliki nilai 0, lakukan operasi kolom - hanya pada kolom ini saja -7 kurangi semua nilai pada kolom 2 dengan -7

Hasilnya adalah sebagai berikut:

Mekanik (M)	Bengkel (B)			
	B_1	B_2	B_3	B_4
M_1	-15	0	0	-7
M_2	0	-4	-15	-3
M_3	0	-3	-7	-3
M_4	-10	-1	-2	0

Setelah operasi baris dan kolom, kini semua baris dan kolom telah mempunyai nilai 0 (inilah tujuan dari operasi baris dan/atau kolom).

Langkah selanjutnya:

1. Beri tanda pada baris atau kolom yang hanya memiliki satu-satunya nilai 0 (sebagai berikut).

Hasilnya adalah sebagai berikut:

Mekanik (M)	Bengkel (B)			
	B_1	B_2	B_3	B_4
M_1	-15	0	0	-7
M_2	0	-4	-15	-3
M_3	0	-3	-7	-3
M_4	-10	-1	-2	0

2. Tampak hanya baris 2, 3, dan 4, serta kolom 2, 3, dan 4 yang memiliki hanya **satu nilai 0**
3. Hanya baris 4 dan kolom 4 yang pada baris dan/atau kolom memiliki **satu-satunya nilai 0** → berarti sebagai prioritas utama (prioritas 1) penugasan terbaiknya adalah mekanik 4 di bengkel 4
4. Penugasan terbaik lainnya seperti yang dicetak tebal dengan mengacu pada baris danlatau kolom yang memiliki **satu-satunya nilai 0** (disebut sebagai prioritas 2).

Mekanik M_4 lebih baik ditempatkan pada bengkel B_4 daripada bengkel B_2. Bengkel B, lebih baik dipegang oleh mekanik M_2 daripada mekanik M_3, dan seterusnya

Hasil penugasan terbaik adalah:

Mekanik - Bengkel	**Nilai Prestasi**
M_1-B_2	76
M_2-B_1	80
M_3-B_3	70
M_4-B_4	80

Total solusi = 306

2. Contoh kasus minimasi

Pada sebuah rurnah sakit ada 5 klinik spesialis (THT, Anak, Kandungan, Mata, dan Gigi) yang dibantu oleh 5 orang perawat (sebut saja Nia, Ani, Tia, Ita, dan Ati). Data nilai kesalahan yang dibuat oleh kelima perawat bila ditempatkan pada masing-masing klinik tersebut adalah sebagai berikut.

Perawat	Klinik				
	THT	**Anak**	**Kandungan**	**Mata**	**Gigi**
Nia	33	30	28	41	23
Ani	26	333	36	28	30
Tia	28	33	25	25	34
Ita	37	30	29	32	25
Ati	30	28	40	30	28

Ati memiliki nilai kesalahan 40 bila di klinik Kandungan, Nia memiliki nilai kesalahan hanya 23 bila di klinik Gigi, dan seterusnya. Bagaimana penugasan terbaiknya yang dapat menghasilkan nilai kesalahan total yang terkecil?

Langkah metode *Hungarian* untuk minimasi adalah sama dengan langkah pada maksimasi, dengan mengubah faktor pengurangnya kepada nilai terkecil sebagai berikut.

1. Lakukan operasi baris, yaitu dengan mengurangkan semua nilai pada baris dengan nilai terkecilnya (operasi per baris untuk mendapatkan nilai 0 pada tiap baris).
2. Lakukan operasi kolom untuk memastikan bahwa pada tiap kolom ada nilai 0 (lakukan pengurangan terhadap nilai terkecil hanya pada kolom yang tidak memiliki nilai 0).
3. Lakukan penugasan terbaiknya (merujuk kepada e1emen yang bernilai 0 atau terbesar, dipilih dan dipilah sendiri) dengan cara
    1. Penugasan pertama kali pada baris dan kolom yang memiliki satu-satunya nilai 0
    2. Penugasan berikutnya pada baris saja atau kolom saja yang memiliki satu-satunya nilai 0
    3. Kerjakan terus hingga se1esai dan diperoleh nilai terkecil

Data awal

Perawat	Klinik				
	THT	Anak	Kandungan	Mata	Gigi
Nia	33	30	28	41	23
Ani	26	333	36	28	30
Tia	28	33	25	25	34
Ita	37	30	29	32	25
Ati	30	28	40	30	28

Operasi baris:

1. Kurangkan semua nilai pada baris 1 dengan 23
2. Kurangkan semua nilai pada baris 2 dengan 26
3. Kurangkan semua nilai pada baris 3 dengan 25
4. Kurangkan semua nilai pada baris 4 dengan 25
5. Kurangkan semua nilai pada baris 5 dengan 28

Hasilnya adalah sebagai berikut (kebetulan semua kolomnya juga sudah ada **nilai 0** sehingga tidak perlu lanjut ke operasi kolom).

Perawat	Klinik				
	THT	Anak	Kandungan	Mata	Gigi
Nia	10	7	5	18	0
Ani	0	7	10	2	4
Tia	3	8	0	0	9
Ita	12	5	4	7	0
Ati	2	0	12	2	0

Beri tanda pada baris danlatau kolom yang mempunyai satu-satunya nilai 0

Hasilnya adalah sebagai berikut :

Perawat	**Klinik**				
	THT	**Anak**	**Kandungan**	**Mata**	**Gigi**
Nia	10	7	5	18	0
Ani	0	7	10	2	4
Tia	3	8	0	0	9
Ita	12	5	4	7	0
Ati	2	0	12	2	0

1. Baris 2 dan kolom 1 adalah prioritas utama (prioritas 1) karena memiliki satu-satunya nilai 0 pada baris dan kolom, tugaskan perawat 2 pada klinik 1
2. Penugasan lainnya seperti yang tampak di atas

Hasil penugasan terbaik

Perawat-Klinik	**Kesalahan**
NIA-Gigi	23
ANI-THT	26
TIA-Mata	25
ITA-Kandungan	29
ATI-Anak	28

6.2. Kasus Tidak Seimbang

Bila terdapat jumlah pekerjaan lebih besar dari jumlah karyawan, maka harus ditambahkan suatu karyawan semu (dummy worker). Biaya semu adalah sama dengan nol., karena tidak akan terjadi biaya bila suatu pekerjaan ditugaskan ke karyawan semu.

Atau dengan kata lain karena sebenarnya pekerjaan tersebut tidak dilaksanakan. Sebaliknya bila jumlah karyawan lebih besar dari jumlah pekerjaan, maka harus ditambahkan suatu pekerjaan semu (dummy job).

Contoh soal:

Sebuah perusahaan kecil memiliki 5 (lima) produk yang berbeda untuk dijual oleh 4 (empat) Sales Promotion Girl (SPG). Seperti pada table. Bagaimana cara penugasan untuk tiap-tiap SPG yang harus diambil perusahaan untuk memperoleh penjualan maksimum?

Berikut adalah tabel penjualan produk oleh setiap oleh SPG:

Penjualan (unit)		**Produk**				
		I	**II**	**III**	**IV**	**V**
SPG	**A**	15	9	12	6	10
	B	13	8	14	11	16
	C	7	12	8	10	11
	D	14	13	10	9	7

Langkah – langkah penyelesaian :

Langkah 1

Karena penugasan ini tidak seimbang, maka perlu ditambahkan variable *dummy* menjadi;
Tabel penjualan produk oleh masing – masing SPG setelah ditambahkan variable *dummy*.

Penjualan (unit)		**Produk**				
		I	**II**	**III**	**IV**	**V**
SPG	**A**	15	9	12	6	10
	B	13	8	14	11	16
	C	7	12	8	10	11
	D	14	13	10	9	7
	Dummy	0	0	0	0	0

Matriks keuntungan

Dari permasalahan diatas diperoleh matriks keuntungan sebagai berikut:

Penjualan (unit)		**Produk**				
		I	**II**	**III**	**IV**	**V**
SPG	**A**	15	9	12	6	10
	B	13	8	14	11	16
	C	7	12	8	10	11
	D	14	13	10	9	7
	Dummy	0	0	0	0	0

Matriks opportunity-loss

Dengan mengurangkan seluruh elemen dalam tiap tiap baris dengan nilai maksimum dari baris yang sama, setelah itu hasil dari pengurangan di harga mutlakkan sehingga semua hasil dari pengurangan bernilai positif.

Penjualan (unit)		**Produk**				
			II	**III**	**IV**	**V**
SPG	**A**	15	9	12	6	10
	B	13	8	14	11	16
	C	7	12	8	10	11
	D	14	13	10	9	7
	Dummy	0	0	0	0	0

Diperoleh matrik opportunity-loss sebagai berikut:

Penjualan (unit)		**Produk**				
		I	**II**	**III**	**IV**	**V**
SPG	**A**	0	6	3	9	5
	B	3	8	2	5	0
	C	5	0	4	2	1
	D	0	1	4	5	7
	Dummy	0	0	0	0	0

Matriks total-opportunity-loss

Seluruh elemen dalam tiap kolom dikurangi dengan nilai minimum dari kolom yang sama, sehingga diperoleh matriks total-opportunity-loss sebagai berikut:

Penjualan (unit)		**Produk**				
		I	**II**	**III**	**IV**	**V**
SPG	**A**	0	6	3	9	5
	B	3	8	2	5	0
	C	5	0	4	2	1
	D	0	1	4	5	7
	Dummy	0	0	0	0	0

sehingga diperoleh matriks total-opportunity-loss sebagai berikut:

Penjualan (unit)		**Produk**				
		I	**II**	**III**	**IV**	**V**
SPG	**A**	0	6	3	9	5
	B	3	8	2	5	0
	C	5	0	4	2	1
	D	0	1	4	5	7
	Dummy	0	0	0	0	0

Matriks test for optimality

Pola penugasan diperoleh sebagai berikut:

Penjualan (unit)		Produk				
		I	II	III	IV	V
SPG	**A**	0	6	3	9	5
	B	3	8	2	5	0
	C	5	0	4	2	1
	D	0	1	4	5	7
	Dummy	0	0	0	0	0

Karena, jumlah garis = 4 sedangkan jumlah baris atau kolom = 5.
Sehingga solusi belum layak, diperlukan revisi pada matriks.

Matriks hasil revisi dan test-for-optimality

Elemen terkecil yang belum terliput garis yaitu 1, digunakan untuk mengurangi seluruh elemen yang terliput garis. Kemudian, nilai ini juga ditambahkan pada elemen dengan dua garis berpotongan, yaitu 3, 8, 0 dan 0 sehingga berturut turut menjadi 4, 9, 1 dan 1.
Matriks hasil revisi pertama dan test-for-opportunity yaitu:

Penjualan (unit)		Produk				
		1	2	3	4	5
SPG	**A**	0	6	2	8	4
	B	4	9	2	5	0
	C	5	0	3	1	0
	D	0	1	3	4	6
	Dummy	1	1	0	0	0

Karena, jumlah garis = 4, maka jumlah garis ≠ jumlah baris atau kolom yang ada, yaitu 5 (lima), sehingga solusi yang diperoleh belum layak, diperlukan revisi lagi pada matriks hasil revisi pertama, dengan langkah – langkah seperti sebelumnya.
Matriks hasil revisi kedua dan test-for-optimality yaitu:

Penjualan (unit)		**Produk**				
		1	**2**	**3**	**4**	**5**
SPG	**A**	0	5	1	7	4
	B	4	8	1	4	0
	C	6	0	3	1	1
	D	0	0	2	3	6
	Dummy	2	1	0	0	0

Karena, jumlah garis = 4 sedangkan jumlah baris atau kolom = 5. Sehingga solusi belum layak, diperlukan revisi pada matriks hasil revisi kedua.

Matriks hasil revisi ketiga dan test-for-optimality yaitu:

Penjualan (unit)		**Produk**				
		1	**2**	**3**	**4**	**5**
SPG	**A**	0	5	0	6	4
	B	4	8	0	3	0
	C	6	0	2	0	1
	D	0	0	1	2	6
	Dummy	3	2	0	0	1

Dari matriks diatas, telah diperoleh suatu solusi optimum yang layak, sebab jumlah garis = jumlah baris atau kolom yang ada, yaitu 5 (lima).

Pola penugasan optimum dengan penjualan total tertinggi adalah sebagai berikut:

SPG	Produk	Penjualan (unit)
A	1	15
B	5	16
C	4	10
D	2	13
Dummy	3	0
		54

Pola penugasan optimum alternative yaitu:

SPG	Produk	Penjualan (unit)
A	3	12
B	5	16
C	2	12
D	1	14
Dummy	4	0
		54

Dari tabel dapat disimpulkan, pada pola penugasan optimum, tidak ada satupun SPG ditugaskan untuk menjual produk 3 (tiga). Dan pada pola penugasan optimum alternative, tidak ada satupun SPG yang ditugaskan untuk menjual produk 4 (empat).

BAB 7 TEORI PERMAINAN

7.1. Pengertian

Teori permainan (*game theory*) adalah suatu pendekatan matematis untuk merumuskan situasi persaingan dan konflik antara berbagai kepentingan. Teori ini dikembangkan untuk menganalisis proses pengambilan keputusan dari situasi-situasi persaingan yang berbeda-beda dan melibatkan dua atau lebih kepentingan. Sebagai contoh para manajer pemasaran bersaing dalam memperebutkan bagian pasar, para pimpinan serikat dan manajemen yang terlibat dalam penawaran kolektif, para jendral tentara yang ditugaskan dalam perencanaan dan pelaksanaan perang, dan para pemain catur, yang semuanya terlibat dalam usaha untuk memenangkan *permainan*. Kepentingan-kepentingan yang bersaing dalam permainan disebut para *pemain* (*players*). Anggapannya adalah bahwa setiap pemain mempunyai kemampuan untuk mengmbil keputusan secara bebas dan rasional.

Teori permainan mula-mula dikembangkan oleh seorang ahli matematika perancis bernama *Emile Borel* pada tahun 1921. Kemudian, *Jhon Von Neumann* dan *Oskar morgensten* mengembangkan lebih lanjut sebagai alat untuk merumuskan perilaku ekonomi yang bersaing. Aplikasi-aplikasi nyata yang paling sukses dari teori permainan banyak ditemukan dalam militer. Tetapi dengan berkembangnya dunia usaha (bisnis) yang semakin bersaing dan terbatasnya sumber daya serta saling ketergantunga sosial, ekonomi, dan ekologi yang semakin besar, akan meningkatkan pentingnya aplikasi-aplikasi teori permainan. Kontrak dan program tawar menawar serta keputusan-keputusan penetapan harga adalah contoh penggunaan teori permainan yang semakin meluas.

Model-model teori permainan dapat diklasifikasikan dengan sejumlah cara, seperti *jumlah pemain*, *jumlah keuntungan dan kerugian* dan jumlah strategi yang digunakan dalam permainan. Sebagai contoh, bila jumlah pemain adalah dua, permainan disebut sebagai permainan dua-pemain. Begitu juga, bila jumlah pemain adalah N (dengan $N \geq 3$), permainan disebut permainan N-pemain.

Bila jumlah keuntungan dan kerugian adalah nol, disebut permainan jumlah-nol atau jumlah-konstan. Sebaliknya, bila tidak sama dengan nol, permainan disebut permainan bukan jumlah-nol (non zero-zum game).

7.2. Permainan Strategi Murni

Dalam permainan strategi murni, strategi optimal untuk setiap pemain adalah dengan mempergunakan strategi tunggal. Dalam permainan ini, pemain baris (maximizing player) mengidentifikasikan strategi optimalnya melalui aplikasi kriteria maksimin (*maximin*). Sedangkan pemain kolom (minimizing player) menggunakan kriteria minimaks (*minimax*) untuk mengidentifikasikan strategi optimalnya. Dalam hal ini nilai yang dicapai harus merupakan maksimum dari minimaks dan minimum dari maksimin kolom. Pada kasus tersebut *titik equilibrium* telah dicapai dan titik ini sering disebut *titik pelana (saddle point).*

Bila nilai maksimin tidak sama dengan nilai minimaks, titik pelana tidak akan dicapai, sehingga permainan tidak dapat dipecahkan dengan mempergunakan strategi murni. Jadi, kasus ini harus dipecahkan dengan *strategi campuran.*

Sebagai contoh lihat tabel 7.1

Tabel 7.1. matriks permainan dan penyelesaian dengan kriteria maksimin dan minimaks

		Perusahaan B			Minimum Baris
		B_1	B_2	B_3	
Perusahaan A	A_1	1	9	2	1
	A_2	8	5	4	4 ← maksimin
Maksimum kolom		8	9	4 ↑ minimaks	

Kriteria maksimin : cari nilai-nilai minimum setiap baris. Maksimum diantara nilai-nilai minimum tersebut adalah nilai maksimin. Untuk strategi ini, strategi optimal adalah baris dimana terdapat nilai maksimin.

Dari tabel 7.1, nilai-nilai minimum kedua baris adalah 1 dan 4. maksimum dari nilai-nilai minimum adalah 4, sehingga nilai maksimin = 4.

Kriteria minimaks : cari nilai-nilai maksimum setiap kolom. Minimum di antara nilai-nilai maksimum tersebut adalah nilai minimaks. Untuk permainan strategi-murni, strategi optimal adalah kolom di mana terdapat nilai minimaks.

Dari tabel 7.1, ada tiga nilai maksimum kolom yaitu 8, 9, dan 4. minimum dari nilai maksimum ini adalah 4, sehingga nilai minimaks = 4.

7.3. Permainan strategi campuran

Tabel 7.2 : matriks permainan strategi campuran

		Perusahaan B			Minimum Baris
		B_1	B_2	B_3	
Perusahaan A			2	5 7	
	A_1	-1	2	4	2 ← maksimin
	A_2	6	1	9	-1
	A_3				1
Maksimum kolom		6	5 ↑ minimaks	9	

Dari tabel diatas, diketahui bahwa nilai maksimin tidak sama dengan nilai minimaks. Oleh karena itu, tidak dapat diketemukan titik pelana. Kemudian dengan menerapkan aturan dominan, dalam tabel 7.2, strategi B_3 didominasi oleh B_2, sehingga kolom B_3 dapat dihilangkan. Setelah kolom B_3 dihilangkan, dapat diketahui juga bahwa strategi A_2 didominasi oleh strategi A_1. strategi A_2 dihilangkan dari tabel.

Matriks permainan telah berubah menjadi permainan 2 × 2, seperti tabel 7.3 di bawah ini.

Tabel 7.3. reduced game matrix

		Perusahaan B		Minimum baris
		B_1	B_2	
Perusahaan A	A_1	2	5	2 ← maksimin
	A_2	6	1	1
Maksimum kolom		6	5 ↑ Minimaks	

Pada tabel 7.3 diatas tidak ada titik pelana maka permainan dapat dipecahkan dengan menerapkan konsep strategi campuran. Penyelesaian permainan dapat dilakukan dengan :

- **Metoda grafik.** Semua permainan 2 × n (yaitu, pemain baris mempunyai dua strategi dan pemain kolom mempunyai n strategi) dan permainan m×2 (yaitu pemain baris mempunyai m strategi dan pemain kolom mempunyai 2 strategi) dapat diselesaikan secara grafik. Untuk dapat menyelesaikan permainan ini secara grafik , dimensi pertama matriks permainan harus 2.

- **Metoda analisa.** Pendekatan ini bertujuan mengembangkan pola strategi-campuran agar keuntungan atau kerugian yang dialami kedua perusahaan adalah sama. Pola ini dikembangkan dengan menentukan suatu distribusi probabilitas untuk strategi-strategi yang berbeda. Nilai-nilai probabilitas ini memungkinkan untuk ditemukannya strategi campuran yang optimum. Nilai-nilai probabilitas dapat dihitung dengan cara berikut ini.

Untuk perusahaan A

Anggap bahwa digunakan strategi A_1 dengan Probabilitas p, dan untuk A_3 dengan probabilitas 1 - p.

Anggap bahwa B menggunakan strategi B_1, maka keuntungan yang diharapkan A adalah:

Bila, apapun strategi yang digunakan A, perusahaan B meresponnya dengan strategi S_1, maka :

$2p + 6(1-p) = 2p + 6 – 6p =$ **$6 – 4p$**

Bila, apapun strategi yang digunakan A, perusahaan B meresponnya dengan strategi S_2, maka :

$5p + 1(1-p) = 5p + 1 – 1p =$ **$1 + 4p$**

Bila kedua hasil persamaan tersebut digabung, maka :

$6 – 4p = 1 + 4p$
$5 = 8p$
$P = 5/8$
$= 0,625$

Dan apabila nilai p = 0,625, maka nilai (1 - p) adalah (1 – 0,625) = 0,375, sehingga kedua nilai probabilitas untuk strategi S_1 dan S_3 milik perusahaan A sudah diketahui nilainya. Apabila kedua nilai probabilitas tersebut dimasukkan dalam kedua persamaan di atas, maka keuntungan yang diharapkan oleh perusahaan A adalah :

Dengan persamaan ke-1	**Dengan persamaan ke-2**
= 2p + 6(1-p)	= 5p + 1(1-p)
= 2 (0,625) + 6 (0,375)	= 5 (0,625) + 1 (0,375)
= 3,5	**= 3,5**

Perhatikan, bahwa keduanya menghasilkan keuntungan yang diharapkan adalah sama, yakni sebesar 3,5. Coba diingat di atas, bahwa sebelum menggunakan strategi campuran ini keuntungan perusahaan A hanya sebesar 2, berarti dengan digunakan strategi campuran ini, keuntungan perusahaan A bisa meningkat 1,5 menjadi 3,5.
Bagaimana dengan perusahaan B ?

Untuk perusahaan B

Dengan cara serupa, dapat dihitung pay off yang diharapkan untuk perusahaan B. probabilitas untuk strategi B_1 adalah q dan B_2 adalah 1 - q. Bila, apapun strategi yang digunakan B, perusahaan A meresponnya dengan trategi S_1, maka :

2q + 5(1-q) = 2q + 5 – 5q = **5 – 3p**

Bila, apapun strategi yang digunakan B, perusahaan A meresponnya dengan strategi S3, maka :

6q + 1(1-q) = 6q + 1 – 1q = **1 + 5p**

Bila kedua hasil persamaan tersebut digabung, maka :

5 – 3q = 1 + 5q
4 = 8q
Q = 4/8
= 0,5

Dan apabila nilai p = 0,5, maka nilai (1-p) adalah (1 – 0,5) = 0,5, sehingga kedua nilai probabilitas untuk strategi S1 dan S2 milik perusahaan B sudah diketahui nilainya.
Apabila kedua nilai probabilitas tersebut dimasukkan dalam kedua persamaan di atas, maka kerugian minimal yang diharapkan oleh perusahaan B adalah :

Dengan persamaan ke-1	**Dengan persamaan ke-2**
= 2q + 5(1-q)	= 6q + 1(1-q)
= 2 (0,5) + 5 (0,5)	= 6 (0,5) + 1 (0,5)
= 3,5	**= 3,5**

Perhatikan, bahwa keduanya menghasilkan kerugian minimal yang diharapkan adalah sama, yakni sebesar 3,5. Coba diingat di atas, bahwa sebelum menggunakan strategi campuran ini kerugian minimal perusahaan **B** adalah sebesar 5, berarti dengan digunakan strategi campuran ini, kerugian minimal perusahaan B bisa menurun sebesar 1,5 menjadi 3,5.

- **Metode aljabar matriks**

  Metoda aljabar matriks adalah cara lain untuk menyelesaikan suatu permainan yang mempunyai matriks segi empat atau ordo 2 × 2.

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} B_1 & B_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \end{array} & \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} = \{P_{ij}\} \end{array}$$

dimana P_{ij} menunjukkan jumlah pay off dalam baris ke I dan kolom ke j.

Strategi optimal untuk perusahaan A dan B da nilai permainan (V), dapat dicari dengan rumus-rumus berikut :

$$\text{Strategi optimal A} = \frac{[1 \quad 1][P_{adj}]}{[1 \quad 1][P_{adj}]\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

$$strategi\ optimal\ B = \frac{[1 \quad 1][P_{cof}]}{[1 \quad 1][P_{adj}]\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

$$Nilai \quad Permainan \quad (V) = \begin{bmatrix} strategi \\ optimal \quad A \end{bmatrix} [P_{ij}] \begin{bmatrix} strategi \\ optimal \quad B \end{bmatrix}$$

$$= \frac{[P_{ij}]}{[1 \quad 1][P_{adj}]\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

$$Dimana \quad P_{ij} = game\ matrix = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$P_{cof} = cofactor\ matrix = \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$$

$$P_{adj} = adjo\text{int}\ matrix = [P_{cof}]^T = \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$[P_{ij}] = a.d - b.c$$

Jadi dapat diketahui:

$$[P_{ij}] = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P_{cof} = \begin{bmatrix} 1 & -6 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$P_{adj} = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ -6 & 2 \end{bmatrix}$$

$$[P_{ij}] = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 1 \end{bmatrix} = (2 \times 1) - (5 \times 6) = -28$$

Dari hasil pencarian dengan rumus maka didapat :

$$Strategi\, optimal\; A = \frac{[-5 \quad -3]}{-8}$$

$$strategi\, optimal\; B = \frac{[-4 \quad -4]}{-8}$$

Jadi, strategi yang optimal adalah

$$A_1 = \frac{-5}{-8} = \frac{5}{8} \qquad A_3 = \frac{-3}{-8} = \frac{3}{8}$$

$$B_1 = \frac{-4}{-8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \qquad B_2 = \frac{-4}{-8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

Jadi, nilai permainan (V)

$$= \frac{\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 1 \end{bmatrix}}{-8} = \frac{-28}{-8} = 3{,}5$$

7.4. Dominasi

Dominasi adalah teknik permainan yang besar (lebih dari matriks 2 x 2)

Contoh.

Tabel Matriks strategi dominasi

Perusahaan A	Perusahaan B B_1	B_2	B_3	Minimum Baris	Maksimin
A_1	2	5	7	2	
A_2	-1	2	4	-1	2
A_3	6	1	9	1	
Maksimum Kolom	6	5	9	Maksimin ≠ Minimaks	
Minimaks		5			

Perhatikan baris A_1 dan A_2 : 2 > -1 ; 5 > 2 ; 7 > 4. Artinya A_1 mendominasi $A_{2,}$ sehingga A_2 keluar dari matriks. Matriks Strategi Dominasi menjadi :

Perusahaan A	Perusahaan B B_1	B_2	B_3	Minimum Baris	Maksimin
A_1	2	5	7	2	2
A_3	6	1	9	1	
Maksimum Kolom	6	5	9	Maksimin ≠ Minimaks	
Minimaks		5			

Sekarang perhatikan Kolom B_3 dan B_2 ; 7 > 5 ; 9 > 1. Artinya B_3 mendominasi B_2, sehingga B2 keluar dari matiks. Matriks strategi Dominasi menjadi :

Perusahaan A	Perusahaan B B_1	B_3	Minimum Baris	Maksimin
A_1	2	5	2	2
A_3	6	1	1	
Maksimum Kolom	6	5	Maksimin ≠ Minimaks	
Minimaks	5			

Matriks permainan sudah berbentuk 2 x 2, sehingga penyelesaian dapat diselesaikan sperti pada strategi campuran

Peluang pemain I

$$X_1 = \frac{H(2,2) - H(2,1)}{H(2,2) - H(2,1) + H(1,1) - (1,2)}$$

$$= \frac{1-6}{1-6+2-5}$$

$$= \frac{-5}{-8}$$

$$= \frac{5}{8}$$

$X_2 = 1 - X_1$

$= 1 - \frac{5}{8}$

$= \frac{3}{8}$

Peluang pemain II.

$Y_1 = \frac{H(2,2) - H(1,2)}{H(2,2) - H(2,1) + H(1,1) - (1,2)}$

$= \frac{1-5}{1-6+2-5}$

$= \frac{-4}{-8}$

$= \frac{1}{2}$

$Y_2 = 1 - Y_1$

$= 1 - \frac{1}{2}$

$= \frac{1}{2}$

Nilai Permainan = $X_1 \cdot Y_1 \cdot H(1,1) + X_1 \cdot Y_2 \cdot H(1,2) + X_2 \cdot Y_1\ H(2,1) + X_2 \cdot Y_2\ H(2,2)$

$= (5/8) \cdot (1/2) \cdot 2 + (5/8) \cdot 1/2 \cdot 5 + 3/8 \cdot 1/2 \cdot 6 + 3/8 \cdot 1/2 \cdot 1$

$= 10/16 + 25/16 + 18/16 + 3/16$

$= 56/16$

$= 7/2$

$= 3\ ½$

BAB 8. JARINGAN KERJA

Jaringan kerja merupakan metode yang dianggap mampu menyuguhkan teknik dasar dalam menentukan urutan dan kurun waktu kegiatan unsur proyek, dan pada gilirannya dapat dipakai untuk memperkirakan waktu penyelesaian proyek secara keseluruhan.

8.1. Guna jaringan kerja

1. Menyusun urutan kegiatan proyek yang memiliki sejumlah besar komponen dengan hubungan ketergantungan yang kompleks.
2. Membuat perkiraan jadwal proyek yang paling ekonomis.
3. Mengusahakan fluktuasi minimal penggunaan sumber daya.

8.2. Metode jaringan kerja.

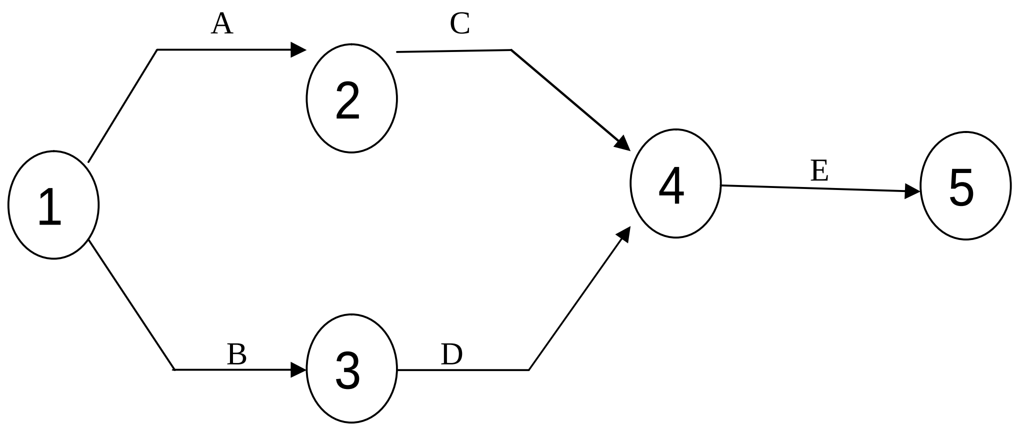
Untuk menentukan waktu yang diperlukan dan mengembangkan suatu sistem, analis sistem sering menggunakan suatu teknik kuantitatif yang disebut PERT (*Programming Evaluation and Review Technique*). Pert dikembangkan sekitar tahun 1950 oleh Navy Special Project Office bekerjasama dengan Booz, Allen dan hamilton yang merupakn suatu konsultan manajemen.

Bila akan menggunakan PERT, 2 buah informasi diperlukan untuk masing masing pekerjaan yaitu urutan dari kegiatan masing-masing pekerjaan dan waktu yang diperlukan untuk menyelesaikan masing-masing pekerjaan itu. Urutan pekerjaan ini digambarkan dalam bentuk diagram jaringan (*network diagram*) atau disebut juga diagram panah (*arrow diagram*) yang menggunakn simbol-simbol:

1. Panah (*arrow*) yang digunakan untuk mewakili suatu kegiatan (*activity*).
2. Simpul (*node*) yang digunakan untuk mewakili suatu kejadian (*event*).

Pada gambar 8.1 terdapat 5 kegiatan yaitu A,B,C,D dan E serta 5 buah kejadian 1,2,3,4 dan 5. kejadian yang mengawali suatu kegiatan disebut kejadian ekor (*tail event*) dan kejadian yang mengakhiri suatu kegiatan disebut kejadian kepala (*head event*). Urutan-urutan kegiatan dari kegiatan A sampai E adalah sebagai berikut:

Contoh :

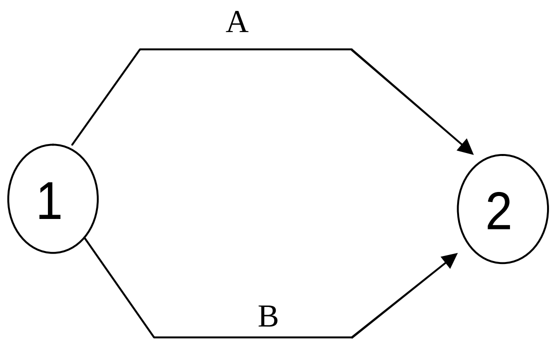


Gambar 8.1 Diagram Jaringan.

1. Kegiatan A dan B merupakan kegiatan pertama di proyek dan dapat dikerjakan secara serentak bersamaan. Kegaitan A mengawali kegiatan C dan kegiatan B mengawali kegiatan D. dengan kata lain kegiatan C belum dapat dikerjakan bial pekerjaan A belum dikerjakan dan kegiatan D belum dapat dikerjakan bila pekerjaan B belum selesai dikerjakan.
2. Kegiatan C dan D mendahului kegiatan E atau dengan kata lain pekerjaan E belum dapat dikerjakan bila pekerajaan C dan D belum selesai dikerjakan.
3. Kegiatan E merupakan kegiatan akhir dari proyek dan belum dapat dikerjakan biola pekerjaan C dan D belum selesai dikerjakan.

Untuk menggambar diagram jaringan terdapat beberapa aturan-aturan yang harus diikuti, yaitu:

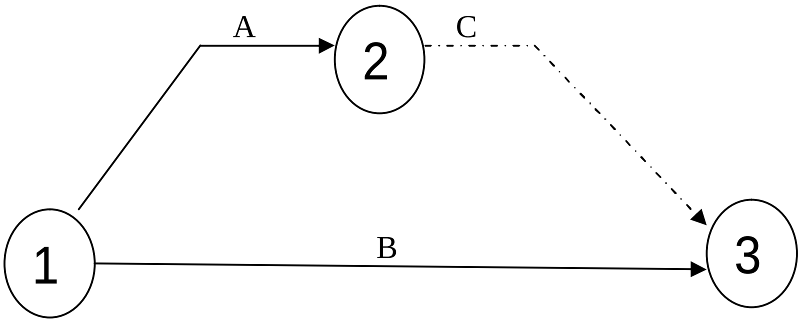
1. setiap kegiatan hanya dapat diwakili oleh satu dan hanya satu panah di jaringan. Tidak ada sebuah kegiatan yang diwakili dua kali dijaringan (tidak ada yang kembar).



Gambar 8.2 Diagram Jaringan yang salah

2. Tidak ada dua kegiatan yang ditunjukkan oleh ekor kejadian dan kepala kejadian yang sama.

   penggambaran pada contoh ini salah karena dua kegiatan A dan B ditunjukkan oleh dua ekor kejadian (kejadian nomor 1 dan kepala kejadian no 2) yang sama. Untuk kasus ini, penggambaran yang benar menggunakan kegiatan dummy (*dummy activity*).

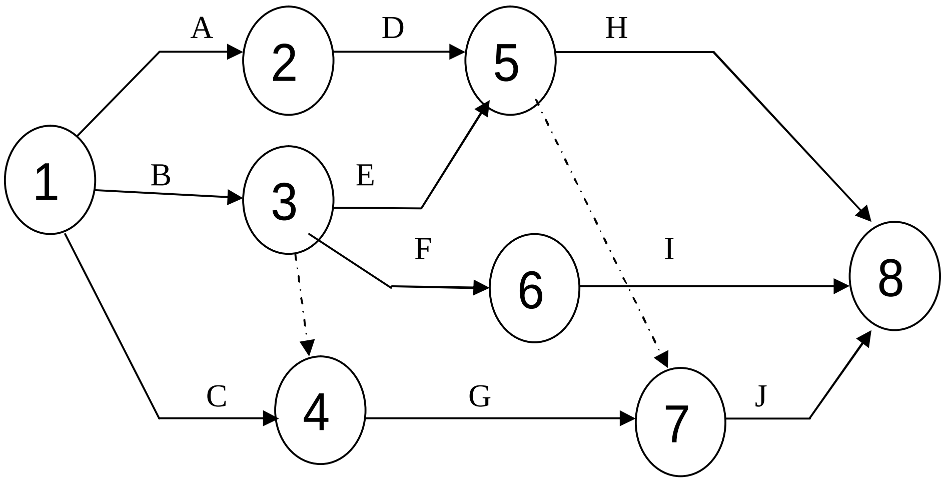


Gambar 8.3 Kegiatan Dummy

Kegiatan dummy digambarkan dengan panah bergaris terpotong-potong. Akibat dengan digunakannya kegiatan dummy C maka kegiatan A dan B dapat diidentifikasikan dengan kepala kejadian yang berbeda.

3. Untuk meyakinkan hubungan urutan yang benar di diagram jaringan pertanyaan-pertanyaan berikut harus dijawab untuk tiap-tiap kegiatan yang akan ditambahkan di dalam jaringan :
   a. kegiatan apa yang ahrus sudah diselesaikan terlebih dahulu sebelum kegiatan ini dapat dilakukan?
   b. kegiatan apa yang harus mengikuti kegiatan ini?
   c. kegiatan apa yang ahrus dilakukan serentak dengan kegiatan ini?

   Kegiatan – kegiatan ini dapat digambarkan dalam diagram jaringan sebagai berikut :



Gambar 8.4. Contoh Jaringan Kerja

8.3. Jalur Kritis

Aplikasi dari teknik PERT ini adalah untuk menghitung waktu penyelesaian dari suatu proyek. Waktu penyelesaian ini dapat dihitung dari masing-masing jalur (*path*) dari kegiatan-kegiatan di jaringan. Suatu jalur (*path*) dapat didefinisikan sebagai suatu urutan dari kegiatan yang berhubungan di dalam proyek. Suatu jalur kritis (*critical path*) adalah jalur yang menunjukkan kegiatan kritis dari awal kegiatan sampai dengan akhir kegiatan di diagram jaringan. Jalur kritis menunjukkan kegiatan-kegiatan kritis di dalam proyek. Suatu kegiatan disebut dengan kegiatan kritis bila penundaan waktu dikegiatan ini akan mempengaruhi waktu penyelasaian keseluruhan dari proyek. Sedang kegiatan disebut dengan tidak kritis bila kegiatan ini mempunyai waktu yang dapat ditunda. Waktu yang dapat ditunda dikegiatan tidak kritis disebut dengan *slack* atau *float*.

Jalur kritis penting karena mempunyai 2 alasan, yaitu:

1. Waktu penyelesaian proyek tidak dapat dikurangi kecuali bila satu atau lebih kegiatan dijalur kritis dapat dipercepat penyelesaiannya. Dengan demikian bila waktu penyelesaian proyek secara keseluruhan akan dipercepat, maka kegiatan-kegiatan yang harus dipercepat adalah kegiatan-kegiatan dijalur kritis.
2. Penundaan kegiatan dijalur kritis akan menyebabkan penundaan waktu penyelesaian dari proyek, sedang penundaan di jalur tidak kritis mungkin tidak akan menunda waktu penyelesaian proyek sejauh penundaan ini tidak melebihi waktu dari slack untuk masing-masing kegiatan tidak kritis.

8.4. Terminologi

1. TE = E, Waktu paling awal peristiwa (node/event) dapat terjadi (Earliest Time Of Occurance), yang berarti waktu paling awal suatu kegiatan yang berasal dari *node*

tersebut dapat dimulai. Suatu kegiatan baru dapat dimulai, bila kegiatan terdahulu telah selesai.

2. TL = L, Waktu paling akhir peristiwa boleh terjadi (Latest Allowable Event/Occurance Time), yang berarti waktu paling lambat yang masih diperbolehkan bagi suatu peristiwa terjadi.
3. ES, Waktu mulai paling awal suatu kegiatan (Earliest Start Time). Bila waktu kegiatan dinyatakan atau berlangsung dalam jam, maka waktu ini adalah jam paling awal kegiatan dimulai.
4. EF, Waktu selesai paling awal suatu kegiatan (Earliest Finish Time). Bila hanya ada satu kegiatan terdahulu, maka EF suatu kegiatan terdahulu, merupakan ES kegiatan berikutnya.
5. LS, Waktu paling akhir kegiatan boleh mulai (latest Alowable Start Time), yaitu waktu paling akhir kegiatan boleh dimulai tanpa memperlambat proyek secara keseluruhan.
6. LF, Waktu paling akhir kegiatan boleh selesai (Latest Allowable Finish Time) tanpa memperlambat penyelesaian proyek.
7. D, Adalah kurun waktu suatu kegiatan, umumnya dengan satuan waktu hari, minggu, bulan, dan lain-lain.

8.5. Perhitungan

1. Hitungan Maju

a. AT-1, Kecuali kegiatan awal, maka suatu kegiatan baru dapat dimulai bila kegiatan yang mendahului (predecessor) telah selesai.

b. AT-2, Waktu selesai paling awal suatu kegiatan adalah sama dengan waktu mulai paling awal, ditambah kurun waktu kegiatan yang bersangkutan, (EF = ES + D atau EF(i-j) + D(i-j).

c. AT-3, Bila suatu kegiatan memiliki dua atau lebih kegiatan-kegiatan terdahulu yang menggabung, maka waktu mulai paling awal (ES) kegiatan tersebut adalah sama dengan waktu selesai paling awal (EF) yang terbesar dari kegiatan terdahulu.

2. Hitungan Mundur

Perhitungan mundur dimaksudkan untuk mengetahui waktu atau tanggal paling akhir kita "masih" dapat memulai dan mengakhiri masing-masing kegiatan, tanpa menunda kurun waktu penyelesaian proyek secara keseluruhan, yang telah dihasilkan dari hitungan maju.

a. AT-4, waktu mulai paling akhir suatu kegiatan adalah sama dengan waktu selesai paling akhir, dikurangi kurun waktu berlangsungnya kegiatan yang bersangkutan atau LS = LF - D

b. AT-5, Bila suatu kegiatan memiliki (memecah menjadi) 2 atau lebih kegiatan berikutnya (successor), maka waktu selesai paling akhir (LF) kegiatan tersebut adalah sama dengan waktu mulai paling akhir (LS) kegiatan berikutnya yang terkecil.

c. AT-6, Float total suatu kegiatan sama dengan waktu selesai paling akhir, dikurangi waktu selesai paling awal atau waktu mulai paling akhir, dikurangi waktu mulai paling awal dari kegiatan berikut atau dgn rumus TF = LF – EF = LS - ES

d. AT6-a, Float total sama dengan waktu paling akhir terjadinya node berikutnya L(j), dikurangi waktu paling awal terjadinya node terdahulu E(i), dikurangi kurun waktu kegiatan yang bersangkutan D(i-j). TF = L(j) – E(i) – D(i-j)

e. AT-7, Float bebas dari suatu kegiatan adalah sama dengan waktu mulai paling awal (ES) dari kegiatan berikutnya dikurangi waktu selesai paling awal (EF) kegiatan yang dimaksud.

f. AT-8, Float interferen sama dengan float total dikurangi float bebas atau IF = FT – FF.

g. AT-9, Float Independen (Fld) = ES kegiatan berikutnya dikurangi LF kegiatan terdahulu dikurangi kurun waktu kegiatan yang dimaksud.

DAFTAR PUSTAKA

A. Taha, Hamdy, 1996, *Riset Operasi Jilid 1*, Binarupa Aksara, Jakarta

Aminudin, 2005, Prinsip-Prinsip Riset Operasi, Erlangga, Jakarta.

Hilier, Frederich S. and Lieberman. 1990, Introduction to Operation Research, McGraw-Hill,

Jong Jek Siang, 2009, Riset Operasi Dalam Pendekatan Algoritmis, Andi Offset, Yogyakarta.

Sri Mulyono, 2002, Riset Operasi, LPEM UI, Jakarta.